Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1976

УДК 226.22.28

НГУЕН СУАН ХАН

ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В работе найдены замкнутые выражения для функции Грина и амплитуды рассеяния скалярной частицы во внешнем гравитационном поле $g_{\mu\nu}(x)$ в виде функциональных интегралов. Показано, что тензорный характер гравитационного поля приводит к более быстрому росту сечения с энергией, по сравнению с рассеянием на векторном потенциале. Получены дискретные энергетические уровни частицы в ньютоновском потенциале.

В работе [1] был предложен способ формального решения уравнения для функции Грина частицы во внешнем поле с помощью функционального интеграла. Такое представление гриновских функций оказалось полезным при исследовании взаимодействия элементарных частиц в инфракрасной области [2] и в области высоких энергий [3, 4].

В настоящей работе делается попытка распространить этот подход на нелинейное взаимодействие с производными. Рассматривается скалярное поле $\psi(x)$, взаимодействующее с гравитационным полем $g_{\mu\nu}(x)$. Получено замкнутое выражение для функции Грина скалярной частицы во внешнем поле $g_{\mu\nu}(x)$ в виде функционального интеграла. В отличие от работы [5], где рассматривалась такая же задача, в нашем подходе явно учтено дополнительное условие на поле $g_{\mu\nu}(x)$ (условие гармоничности).

Гриновская функция скалярной частицы в поле $g_{\mu\nu}(x)$, представленная в виде функционального интеграла, используется далее при построении амплитуды рассеяния. В высокоэнергетической области получена эйкональная формула для амплитуды рассеяния скалярной частицы на тензорном потенциале. В качестве примера рассмотрен потенциал Ньютона . Показано, что тензорный характер гравитационного поля приводит к более быстрому росту сечения по сравнению с высокоэнергетическим рассеянием на векторном потенциале. Кроме этого, в работе получены дискретные энергетические уровни частицы в ньютоновском потенциале.

§ 1. Функция Грина скалярной частицы во внешнем гравитационном поле

Лагранжиан скалярного поля $\psi(x)$ во внешнем гравитационном поле $g_{\mu\nu}(x)$ имеет вид

$$L(x)=\frac{\sqrt{-g}}{2}\left[g^{\mu\nu}(x)\,\partial_\mu\psi(x)\,\partial_\nu\psi(x)-m^2\psi^2(x)\right],\tag{1}$$

где

$$g=\det g_{\mu\nu}(x)=\det\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(x).$$

Варьирование этого лагранжиана приводит к следующему уравнению на поле $\psi(x)$:

$$\left[-\tilde{g}^{\mu\nu}_{(x)}\partial_\mu\partial_\nu-\sqrt{-g}\,m^2-\partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}(x)\,\partial_\nu\right]\psi(x)=0,\tag{2}$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x)=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(x).$$

Уравнение (2) удобно рассматривать в гармонических координатах, определяемых условием

$$\partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}(x)=0.\tag{3}$$

Гармоническая калибровка (3), являющаяся аналогом лоренцевой калибровки в электродинамике, приводит к исключению нефизических компонентов тензорного поля [6].

Уравнение (2) с учетом условия (3) принимает вид

$$\left[\tilde{g}^{\mu\nu}(x)\,i\partial_\mu\,i\partial_\nu-\sqrt{-g}\,m^2\right]\psi(x)=0.$$

Для функции Грина скалярной частицы во внешнем гравитационном поле имеем следующее уравнение:

$$\left[\tilde{g}^{\mu\nu}(x)\,i\partial_\mu\,i\partial_\nu-\sqrt{-g}\,m^2\right]G(x,y\,|\,g^{\mu\nu})=-\delta^{(4)}(x-y).\tag{4}$$

Уравнение (4) можно записать в операторной форме, если использовать предложенное Фоком [7] и Фейнманом [8] представление обратного оператора $[g^{\mu\nu}(x)\,i\partial_\mu\,i\partial_\nu-\sqrt{-g}m^2]^{-1}$ в виде экспоненты:

$$G(x,y\,|\,g^{\mu\nu})=i\int_0^\infty d\tau\exp\left\{-im^2\int_0^\tau\sqrt{-g(x,\xi)}\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\,i\int_0^\tau\tilde{g}^{\mu\nu}(x,\xi)\,i\partial_\mu(\xi)\,i\partial_\nu(\xi)\right\}\delta^{(4)}(x-y).\tag{5}$$

В такой записи экспонента, в показателе которой стоят некоммутирующие величины ∂_μ, $\tilde{g}^{\mu\nu}(x)$ и $g(x)$, рассматривается как T_ξ-экспонента, при этом переменная ξ играет роль упорядочивающего индекса.

Показатель экспоненты в формуле (5) квадратичен по оператору дифференцирования ∂_μ. Поэтому перейти от T-экспоненты к обычному операторному выражению («распутать» операторы по терминологии Фейнмана) без разложения в ряд нельзя. Однако можно понизить степень оператора ∂_μ в формуле (5), если использовать следующее формальное преобразование [1]:

$$\exp\left\{i\int_0^\tau d\xi\,\tilde{g}^{\mu\nu}(x,\xi)\,i\partial_\mu(\xi)\,i\partial_\nu(\xi)\right\}=$$

$$= C_\nu \int \prod_\eta d^4 \nu(\eta) \exp\left\{ i \int_0^\tau d\xi \, [\tilde{g}^{\mu\nu}(x, \xi)]^{-1} \nu_\mu(\xi) \nu_\nu(\xi) - \right.$$

$$\left. - 2i \int_0^\tau d\xi \nu^\mu(\xi) \partial_\mu(\xi) \right\}. \quad (6)$$

Функциональный интеграл в правой части формулы (6) берется в пространстве 4-функций $\nu_\mu(\xi)$. Константа C_ν определяется из условия

$$C_\nu \int \delta^4 \nu_\mu \exp\left\{ - i \int_0^\tau d\xi \, [\tilde{g}^{\mu\nu}(x, \xi)]^{-1} \nu_\mu(\xi) \nu_\nu(\xi) \right\} = 1,$$

откуда следует, что

$$C_\nu = \left[\int \delta^4 \nu_\mu \exp\left\{ - i \int_0^\tau d\xi \, [\tilde{g}^{\mu\nu}(x, \xi)]^{-1} \nu_\mu(\xi) \nu_\nu(\xi) \right\} \right]^{-1} =$$

$$= (\det [g^{\mu\nu}(x, \xi)])^{-\frac{1}{2}}.$$

После подстановки (6) в (5) можно «выпутать» оператор

$$\exp\left\{ - 2 \int_0^\tau d\xi \nu^\mu(\xi) \partial_\mu(\xi) \right\}$$

и получить решение уравнения (4) в виде функционального интеграла

$$G(x, y \,|\, g^{\mu\nu}) = i \int_0^\infty d\tau \, e^{-im^2\tau} C_\nu \int \delta^4 \nu \exp\left\{ - im^2 \int_0^\tau [\sqrt{-g(x_\xi)} - 1] \, d\xi - \right.$$

$$\left. - i \int_0^\tau d\xi \, [\tilde{g}^{\mu\nu}(x_\xi)]^{-1} \nu_\mu(\xi) \nu_\nu(\xi) \right\} \delta^{(4)} \left(x - y - 2 \int_0^\tau \nu(\eta) \, d\eta \right), \quad (7)$$

где

$$x_\xi = x - 2 \int_\xi^\tau \nu(\eta) \, d\eta.$$

Фурье-образ функции $G(x, y/g^{\mu\nu})$ принимает вид

$$G(p, q \,|\, g^{\mu\nu}) = \int dx \, dy \, e^{ipx - iqy} G(x, y \,|\, g^{\mu\nu}) =$$

$$= i \int_0^\infty d\tau \, e^{i(p^2 - m^2)\tau} \int dy e^{i(p-q)y} C_\nu \int \delta^4 \nu \exp\left\{ - im^2 \int_0^\tau [\sqrt{-g(y_\xi)} - 1] \, d\xi - \right.$$

$$\left. - i \int_0^\tau [\tilde{g}^{\mu\nu}(y_\xi)]^{-1} [\nu(\xi) + p]_\mu [\nu(\xi) + p]_\nu \right\}, \quad (8)$$

$$y_\xi = y + 2 \int_0^\xi [\nu(\eta) + p] \, d\eta.$$

Формула (8) является замкнутым выражением для функции Грина скалярной частицы во внешнем гравитационном поле.

Далее будем рассматривать гравитационное поле в линейном приближении, т. е. положим $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$, где $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор Минковского с диагональю $(1, -1, -1, -1)$. Перепишем формулу (8) в переменных $h_{\mu\nu}(x)$, пренебрегая степенями $h_{\mu\nu}(x)$ выше первой[1]:

$$G(p, q \mid h^{\mu\nu}) = i \int\limits_0^\infty d\tau\, e^{i(p^2-m^2)\tau} \int dy\, e^{i(p-q)y} \times$$

$$\times \int \delta^4 \nu_\mu \exp\left\{-i \int\limits_0^\tau \nu_\mu(\xi)\, \nu^\mu(\xi)\, d\xi + i \int\limits_0^\tau \mathfrak{M}(y_\xi)\, d\xi\right\}, \tag{9}$$

где

$$\mathfrak{M}(y_\xi) = \left\{\frac{m^2}{2} h_\nu^\nu(y_\xi) + [\nu(\xi) + p]_\mu [\nu(\xi) + p]_\nu h^{\mu\nu}(y_\xi)\right\}. \tag{10}$$

§ 2. Эйкональное представление для амплитуды рассеяния скалярной частицы на тензорном потенциале

Высокоэнергетическое рассеяние частиц на скалярном и векторном потенциалах в рамках метода функционального интегрирования было исследовано в работах [9]. Используя разложение в ряд по функциональной переменной, покажем, что при рассеянии частиц высокой энергии на гладких потенциалах основной вклад в амплитуду рассеяния дает траектория, которую можно представить отрезками прямых, ориентированных вдоль начального и конечного импульсов. В рамках этого приближения было получено эйкональное представление для амплитуды потенциального рассеяния, которое симметрично по начальному и конечному импульсам.

В этом параграфе мы дадим вывод эйконального представления для амплитуды рассеяния скалярной частицы на гладком тензорном потенциале $h_{\mu\nu}(x)$ с помощью отмеченного выше подхода [9].

Используя выражение (9), найдем амплитуду рассеяния $F(p, q|h^{\mu\nu})$ (p и q импульсы частицы до и после рассеяния) по формуле

$$F(p, q/h^{\mu\nu}) = \lim_{p^2, q^2 \to m^2} (p^2 - m^2)(q^2 - m^2)\, G(p, q \mid h^{\mu\nu}). \tag{11}$$

После подстановки в (11) формулы (9) и перехода в (11) на массовую поверхность (см. [4 и 9]) для амплитуды рассеяния

получим окончательное выражение

$$F(p, q| h^{\mu\nu}) = \int dy\, e^{iTy} \int \delta^4 \nu \exp\left\{-i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu_\mu(\xi)\, \nu^\mu(\xi)\, d\xi\right\} \times$$

---

[1] Лагранжиан (1) в линейном по $h_{\mu\nu}(x)$ приближении принимает вид

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{int}(x),$$

где

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2}[\partial^\mu \psi(x)\, \partial_\mu \psi(x) - m^2 \psi^2(x)], \quad \mathcal{L}_{int}(x) = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu}(x)\, T_{\mu\nu}(x);$$

$$T_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \psi(x)\, \partial_\nu \psi(x) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} [\partial^\mu \psi(x)\, \partial_\mu \psi(x) - m^2 \psi^2(x)]$$

тензор энергии-импульса скалярного поля.

$$\times \mathfrak{M}(y|0)\int_0^1 d\lambda \exp\left\{i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \mathfrak{M}(y|\xi)\right\}, \tag{12}$$

где

$$\mathfrak{M}(y/\xi)=\left\{-\frac{m^2}{2}h_\nu^\nu\left[y+2p\theta(\xi)\xi+2q\theta(-\xi)\xi+2\int_0^\xi \nu(\eta)\,d\eta\right]+\right.$$

$$+[\nu(\xi)+p\theta(\xi)+q\theta(-\xi)]_\mu[\nu(\xi)+p\theta(\xi)+q\theta(-\xi)]_\nu\times$$

$$\left.\times h^{\mu\nu}\left[y+2p\theta(\xi)\xi+2q\theta(-\xi)\xi+2\int_0^\xi \nu(\eta)\,d\eta\right]\right\}, \tag{13}$$

$T=p-q$.

Для оценки функциональных интегралов в формуле (12) применим приближение прямолинейных путей [3, 4], т. е. предположим, что при рассеянии высокоэнергетической частицы на гладком потенциале $h^{\mu\nu}(y)$ в (13) можно пренебречь зависимостью от функциональной переменной $\nu(\eta)$. Используя фейнмановскую интерпретацию амплитуды рассеяния как суммы по путям, можно сказать, что данное приближение эквивалентно учету лишь прямолинейной траектории частицы. Это приближение тесно связано с известным в электродинамике приближением $k_ik_j=0$, справедливость которого была доказана при рассмотрении проблемы инфракрасных асимптотик Е. С. Фрадкиным [10] и Б. М. Барбашовым [2].

В этом приближении амплитуда рассеяния принимает вид

$$F(p,q|h^{\mu\nu})=\int dy\, e^{iTy}\,\mathfrak{M}^*(y|0)\int_0^1 d\lambda \exp\left[i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \mathfrak{M}^*(y/\xi)\right], \tag{14}$$

где

$$\mathfrak{M}^*(y/\xi)=\left\{-\frac{m^2}{2}h_\nu^\nu[y+2p\theta(\xi)\xi+2q\theta(-\xi)\xi]+[p\theta(\xi)+q\theta(-\xi)]_\mu\times\right.$$

$$\left.\times[p\theta(\xi)+q\theta(-\xi)]_\nu h^{\mu\nu}[y+2p\theta(\xi)\xi+2q\theta(-\xi)\xi]\right\}.$$

Для простоты рассмотрим случай, когда потенциал от времени не зависит $h^{\mu\nu}(y)=h^{\mu\nu}(\mathbf{r},t)=h^{\mu\nu}(\mathbf{r})$. Тогда для амплитуды рассеяния получим следующее представление [1]:

$$F(p,q)=2(2\pi)^2\delta(p_0-q_0)\,f(p,q),$$

$$f(p,q)=\frac{1}{2\pi}\int d\mathbf{r}\, e^{iT\mathbf{r}}\,\mathfrak{M}'(r|0)\int_0^1 d\lambda \exp\{i\lambda\chi_0(\mathbf{r})\}, \tag{15}$$

где

$$\mathfrak{M}'(\mathbf{r}|0)=\left\{\frac{m^2}{2}h_\nu^\nu(\mathbf{r})+\frac{1}{4}[p+q]_\mu[p+q]_\nu h^{\mu\nu}(\mathbf{r})\right\},$$

---

[1] Амплитуда $f(p,q)$ нормирована соотношениями

$$\sigma_t=\frac{4\pi}{|p|}Im\, f(p,p),\quad \frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(p,q)|^2.$$

$$\chi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2|p|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \frac{m^2}{2} h^{\nu}_{\nu}(\mathbf{r} + \hat{p}\theta(s)s + \hat{q}\theta(s)s] + [p\theta(-s) + \frac{1}{2} q\theta(-s)]_{\mu} + \right.$$

$$\left. + [p\theta(s) + q\theta(-s)]_{\nu} h^{\mu\nu} [\mathbf{r} + \hat{p}\theta(s)s + \hat{q}\theta(-s)s] \right\}, \qquad (16)$$

$$\hat{p} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}.$$

В случае слабого гравитационного поля тензор $h^{\mu\nu}(\mathbf{r})$ имеет вид [11]

$$h^{00}(\mathbf{r}) = 2\varphi(\mathbf{r}),$$

$$h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = 2\delta_{\alpha\beta}\varphi(\mathbf{r}),$$

$$h^{0\alpha}(\mathbf{r}) = h^{\alpha 0}(\mathbf{r}) = 0 \ (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Так как рассматривается высокоэнергетическое рассеяние, то первым слагаемым в формуле (16) можно пренебречь. В результате имеем

$$f(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r}\, e^{i\mathbf{T}\mathbf{r}} (p_0^2 + \mathbf{p}^2) \varphi(\mathbf{r}) \int\limits_0^1 d\lambda \exp\{i\lambda\chi_0(\mathbf{r})\}, \qquad (17)$$

где

$$\chi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{|p|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds (p_0^2 + \mathbf{p}^2) \varphi(\mathbf{r} + \hat{p}s). \qquad (18)$$

Направим ось z вдоль импульса $\mathbf{p}$, а ось x поместим в плоскости задаваемой векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. В этой системе координат для фазы (18) при рассеянии на малые углы $\theta \ll 1$ получим следующее выражение:

$$\chi_0(p_0, \mathbf{r}) = \frac{2p_0^2}{|p_z|} \left\{ \int\limits_0^{\infty} ds\, \varphi(x, y, z+s) + \int\limits_{-\infty}^{0} ds\, \varphi(x + s\sin\theta, y, z + s\cos\theta) \right\} =$$

$$= \frac{2p_0^2}{|p_z|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\, \varphi(x, y, z+s) = \frac{2p_0^2}{|p_z|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, \varphi(\mathbf{r}). \qquad (19)$$

Передача импульса при малых углах рассеяния почти перпендикулярна оси z, поэтому в формуле (17) можно положить $\exp\{i\mathbf{T}\mathbf{r}\} = \exp\{iT_x x + T_y y)\}$. Интегрируя в этой формуле по dz и $d\lambda$, с учетом (19) получим глауберовское представление для амплитуды [12]

$$f(p, q) = -\frac{i|p_z|}{2\pi} \int d^2b\, e^{ibT_{\perp}} \{\exp[i\chi_0(p_0, b)] - 1\}, \qquad (20)$$

где $\mathbf{b} = (x, y, 0)$, а эйкональная фаза $\chi_0(p_0, b)$ определяется формулой (19).

В заключение рассмотрим рассеяние скалярной частицы на ньютоновском потенциале. Для преодоления трудности, связанной с бесконечным радиусом гравитационного взаимодействия, ньютоновский потенциал рассмотрим как предел юкавского потенциала при $\mu \to 0$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\left.\frac{kM e^{-\mu r}}{r}\right|_{\mu=0} = -\frac{kM}{r},$$

где k — гравитационная постоянная $k = 6 \cdot 10^{-39} m_p^2$, M — масса, создающая потенциал. В этом случае амплитуда рассеяния принимает следующий вид:

$$f(p, q) = -\frac{i|p_z|}{2\pi} \int d^2 b e^{ib\tau} - \left\{ \exp\left[-i\beta \int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{b}_\perp}}{\mathbf{k}_\perp^2 + \mu^2}\right] - 1 \right\}, \quad (21)$$

где

$$\beta = \frac{kMp_0^2}{2\pi |p_z|}.$$

Вычислим интеграл (21), сохраняя лишь члены, не исчезающие при $\mu \to 0$ [1]:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{kM p_0^2}{\pi t} \frac{\Gamma(1+i\beta)}{\Gamma(1-i\beta)} \exp\left\{-i\beta \ln \frac{|\mathbf{T}_\perp|}{\mu C}\right\}, \quad (22)$$

где $t = -|\mathbf{T}_\perp|^2$, C — постоянная Эйлера. Расходящаяся при $\mu \to 0$ фаза в (22) обусловлена, как хорошо известно, дальнодействием ньютоновского потенциала [14]. Сравнение формулы (22) с результатами работы [9], где рассматривалось рассеяние скалярной частицы векторным потенциалом, позволяет заключить, что $\frac{\sigma_{\text{гр}}}{\sigma_{\text{век}}} \sim \frac{k^2M^2}{e^2} p_0^2$. Полюса амплитуды, определяемой формулой (22), дают дискретные энергетические уровни частицы в ньютоновском потенциале

$$E_n = -\frac{k^2m^2M(m+M)}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, 3 \ldots \quad (23)$$

Если в формуле (23) положить $m \approx M$-массе нуклона, то энергия основного уровня системы двух нейтральных частиц, взаимодействующих друг с другом с помощью только гравитационного классического поля, оказывается равной $9{,}4 \cdot 10^{-70}$ эВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашов Б. М. ЖЭТФ, 1965, **48**, 607.
2. Барбашов Б. М., Волков М. К. ЖЭТФ, 1966, **50**, 660.
3. Барбашов Б. М., Блохинцев Д. И., Нестеренко В. В., Первушин В. Н. ЭЧАЯ, 1973, **4**, вып. 3, 623.
4. Barbashov B. M., Kulushov S. P. et al. «Phys. Lett.», 1970, **33B**, 484; Барбашов Б. М., Кулешов С. П. и др. «Теоретическая и математическая физика», 1970, **3**, 1961.
5. Maheshwari A. «Ann of Phys.», 1974, **84**, 474.
6. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961.
7. Fock V. A. «Phys. Z. Sowjetunion», 1937, **12**, 404.
8. Feynman R. P. «Phys. Rev.», 1951, **84**, 108.
9. Первушин В. Н. «Теоретическая и математическая физика», 1970, **4**, 28; 1971, **9**, 264.
10. Фрадкин Е. С. Труды ФИАН СССР, 1965, **29**. М.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1973, с. 428.
12. Glauber R. J. Lectures in Theoretical Physics, v. I. N. Y., 1959, p. 315.
13. Андреев И. В. «Краткие сообщения по физике», 1970, **6**, 34.
14. Моот Н., Месси Г. Теория атомных столкновений, гл. 3. М., 1969 г.

Поступила в редакцию
16.1 1975 г.

НИИЯФ

[1] Аналогичный результат был получен в работе [13], посвященной суммированию диаграмм Фейнмана в полевой теории с обменом безмассовой тензорной частицей.