

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 5 — 1976

УДК 539.124 : 535.2.01

А. М. ВОЛОЩЕНКО, В. Ч. ЖУКОВСКИЙ, Ю. Г. ПАВЛЕНКО

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЯДРЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЯГКИХ ФОТОНОВ

С использованием приближения мягких фотонов получено выражение для сечения тормозного излучения релятивистских электронов на ядре в магнитном поле. В рамках этого приближения рассмотрены также частные случаи многофотонного синхротронного излучения.

Многообразие физических возможностей, при которых имеет место взаимодействие релятивистских частиц в интенсивных внешних полях (см., например, [1]), вызвало потребность провести расчет основных квантово-электродинамических явлений в присутствии внешнего поля. Точный расчет процессов во внешнем поле связан с определенными трудностями. Это приводит к необходимости применения различных приближенных методов, в частности, приближения скрещенного поля [2], различных асимптотических методов [3], приближения Вейцзекера — Вильямса [4, 5]. В данной работе рассчитывается сечение тормозного излучения релятивистских электронов на неподвижном ядре в постоянном магнитном поле с использованием приближения мягких фотонов [6—8], конкретизация которого для случая внешнего поля проведена в [9]. В рамках указанного приближения в работе исследуются также частные случаи многофотонного синхротронного излучения.

Спектр мягких фотонов при упругих столкновениях в магнитном поле

Рассмотрим какой-либо квантовый процесс с участием релятивистских электронов с энергией $\epsilon \gg m$ (в дальнейшем положим $c = \hbar = 1$), движущихся в однородном магнитном поле $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_z$. Такой процесс сопровождается испусканием фотонов, причем если фотоны достаточно мягкие, то всегда можно считать, что время формирования излучения значительно превосходит характерное время протекания основного процесса. В этом случае для расчета спектра мягких фотонов можно аппроксимировать движение электрона двумя составленными дугами окружностей (см. рис. 1). На рис. 1

$$O_1 = (0, R_1), \quad O_2 = (-R_2 \sin \delta, R_2 \cos \delta).$$

Излучение электрона при движении по траектории, составленной из полупрямых AO, OA' , соответствует спектру мягких фотонов при выключении поля $\mathbf{H} \rightarrow 0$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} R_1 \sin \Omega_1 t \mathbf{e}_x + R_1 (1 - \cos \Omega_1 t) \mathbf{e}_y + v_{1z} t \mathbf{e}_z, & t < 0 \\ R_2 (-\sin \delta + \sin(\Omega_2 t + \delta)) \mathbf{e}_x + R_2 (\cos \delta - \\ - \cos(\Omega_2 t + \delta)) \mathbf{e}_y + v_{2z} t \mathbf{e}_z, & t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

причем предполагается, что основной процесс происходит мгновенно в момент времени $t=0$. В этой формуле ε_i начальное ($i=1$) или конечное ($i=2$) значение энергии электрона, $\Omega_i = e_0 H / \varepsilon_i$, где $-e_0 < 0$ — заряд электрона, v_{iz} и $v_{i\perp} = R_i \Omega_i$ — продольный и поперечный по отношению к магнитному полю \mathbf{H} компоненты скорости электрона ($i=1, 2$), а δ — угол, на который изменяется направление \mathbf{v}_\perp в момент $t=0$.

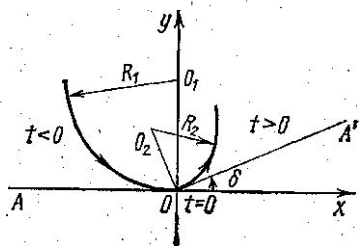


Рис. 1

Определив классический ток $j^\mu(x) = \{\rho(x), \mathbf{j}(x)\}$, соответствующий движению (1), можно вычислить мгновенное спектральное распределение энергии излучения [10—11]

$$dE_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_C (j^\mu(x) e_{\mu}^{*(\lambda)}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^4x \right|^2 d^3k. \quad (2)$$

Эта величина имеет смысл энергии в интервале d^3k вблизи направления $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ и частоты ω излучения, испускаемого с малого участка C траектории вблизи $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в пределах длины когерентности $l_{\text{ког}}$, которая будет определена нами позже.

Зададим волновой вектор \mathbf{k} и векторы π - и σ -компонентов линейной поляризации в виде [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \omega \mathbf{n}(\theta, \varphi) = \omega (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z), \\ \mathbf{e}_\pi &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\sigma &= \sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (3)$$

В упругом процессе энергия не меняется, поэтому положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Для простоты также будем считать, что $v_{1z} = 0$, причем, вообще говоря, $v_{2z} = v \sin \Delta \neq 0$.

Для ультрарелятивистских электронов излучение сосредоточено в основном внутри конуса с углом раствора $\Delta \theta \sim m/\varepsilon$ и осью вдоль направления движения электрона. Поэтому для направлений излучения $\psi = \pi/2 - \theta \sim m/\varepsilon \ll 1$, $\varphi \ll 1$, близких к направлениям начального (\mathbf{v}_1) и конечного (\mathbf{v}_2) движения электрона, при условии $\Delta, \delta \ll 1$ мы получим из формулы (2):

$$\begin{aligned} \frac{dE_\pi(\mathbf{k})}{dE_\sigma(\mathbf{k})} &= \frac{4e_0^2}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{m} \right) 2^{-2/3} y d\omega d\tau d\varphi \times \\ &\times \left(\begin{aligned} &2^{-2/3} y \left| \tau g + \left(\tau - \frac{\varepsilon \Delta}{m} \right) e^{i\Phi} f \right|^2 \\ &\left| \frac{\partial g}{\partial z_1} + e^{i\Phi} \frac{\partial f}{\partial z_2} \right|^2 \end{aligned} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В этой формуле $\Phi = z_1 \zeta_1 - z_2 \zeta_2 + (\zeta_1^3 - \zeta_2^3)/3$, а функции $g \equiv g(z, \xi)$, $f \equiv f(z, \xi)$ являются неполными интегралами Эйри, определение и некоторые свойства которых приведены в Приложении. Они зависят от аргументов:

$$z_1 = 2^{-2/3} y (1 + \tau^2), \quad z_2 = 2^{-2/3} y \left(1 + \tau^2 \left(1 - \frac{\Delta}{\Psi} \right)^2 \right),$$

$$\zeta_1 = -2^{-1/3} y^{1/2} \varphi \frac{\varepsilon}{m}, \quad \zeta_2 = \left(1 - \frac{\delta}{\varphi} \right) \zeta_1, \quad (5)$$

где

$$y = \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2/3}, \quad \omega_c = \Omega \left(\frac{\varepsilon}{m} \right)^3, \quad \tau = \frac{\varepsilon \Psi}{m}.$$

Найдем спектральное распределение энергии излучения $dE_\lambda(\omega)$. Так как основной вклад в сечение основного процесса дают малые углы Δ, δ , то, проводя разложение в выражении (4) по $\Delta \ll m|\varepsilon$ и $\delta \ll m|\varepsilon$ и воспользовавшись при интегрировании по τ результатами работы [12] (см. также [13]¹), получим:

$$dE_\lambda(\omega) = dE_\lambda^{(0)}(\omega) + dE_\lambda^{(1)}(\omega),$$

$$\left(\frac{dE_\pi}{dE_\sigma} \right)^{(0)} = \frac{e_0^2}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\varepsilon}{m} \right) (\varphi_2 - \varphi_1) y^{1/2} \begin{pmatrix} -y\Phi_1(y) - \Phi'(y) \\ -y\Phi_1(y) - 3\Phi'(y) \end{pmatrix} d\omega, \quad (6)$$

$$\left(\frac{dE_\pi}{dE_\sigma} \right)^{(1)} = \frac{e_0^2}{2\sqrt{\pi}} \left[\begin{pmatrix} y\Phi_1(y) + \frac{1}{3}\Phi'(y) \\ y\Phi_1(y) + \Phi'(y) + \frac{4}{3}y^2\Phi(y) \end{pmatrix} y^{1/2} \left(\frac{\varepsilon\delta}{m} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3\Upsilon(y) - 2y\Upsilon'(y) \\ -\Upsilon(y) - 8y\Upsilon'(y) + 4y^2\Upsilon''(y) \end{pmatrix} y \left(\frac{\varepsilon\delta}{m} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} \Upsilon(y) \\ -\frac{1}{3}\Upsilon(y) - \frac{2}{3}y\Upsilon'(y) \end{pmatrix} y \left(\frac{\varepsilon\Delta}{m} \right)^2 \right] d\omega.$$

Здесь $\Phi(y)$ и $\Upsilon(y)$ — функция Эйри и ипсилон-функция (см. Приложение (19)), а $\Phi_1(y) = \int_y^\infty \Phi(x) dx$. Интегрирование по углу φ выполнено в конечных пределах $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 > 0$, удовлетворяющих условиям

$$|\varphi_{1,2}| \gg \frac{m}{\varepsilon} \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^{1/3} \right], \quad |\varphi_{1,2}| \ll \frac{m}{\varepsilon e_0^2}, \quad 1. \quad (7)$$

Первое из них означает, что интегрирование в (6) проведено по всему импульсу излучения, связанному с упругим столкновением, и учитывает известное (см., например, [8]) расширение углового распределения излучения для частот $\omega \ll \omega_c$.

¹ В [13] имеется опечатка: в формуле (14) в выражении для σ -компонента перед y следует поставить знак минус.

Второе же условие является по существу необходимым условием применимости теории возмущений. Поэтому, переходя на квантовый язык, мы можем ввести вероятность испускания мягкого фотона $d\omega \ll 1$:

$$d\omega_\lambda(\omega) = \frac{dE_\lambda(\omega)}{\hbar\omega} = d\omega_\lambda^{(0)} + d\omega_\lambda^{(1)}. \quad (8)$$

Слагаемое $d\omega^{(0)}$, соответствующее $dE^{(0)}$, не зависит от углов рассеяния и равно вероятности синхротронного излучения при движении заряда по окружности. При $\omega \gg \omega_c$ слагаемое $d\omega^{(0)} \rightarrow 0$, а другое слагаемое $d\omega^{(1)}$ переходит в вероятность тормозного излучения мягкого фотона в отсутствие внешнего поля $H=0$ [7, 8].

Сечение тормозного излучения на кулоновском центре в магнитном поле

Приближение мягких фотонов, так же как и в случае $H=0$ [7, 8], позволяет вычислить с логарифмической точностью сечение тормозного излучения при частотах $\omega \ll \epsilon$.

Для релятивистских электронов область взаимодействия с кулоновским центром $\rho_{\text{макс}}$, которая соответствует минимальным углам рассеяния, дающим вклад в излучение с частотой ω , имеет порядок длины когерентности: $\rho_{\text{макс}} \sim l_{\text{ког}} \ll R = \epsilon/e_0 H$. Так, при $\omega \sim \omega_c$ $\rho_{\text{макс}} \sim H/H_0 m$ ($H_0 = m^2/e_0 = 4,4 \cdot 10^{13}$ э) и соответственно отношение $\rho_{\text{макс}}/R \sim m/\epsilon \ll 1$. Это условие позволяет ввести понятие сечения рассеяния на кулоновском центре в магнитном поле. При этом, однако, изменится определение начальных и конечных состояний электрона в процессе рассеяния и угла рассеяния.

Именно в качестве начальных и конечных состояний электрона в случае квазиклассического движения следует принять выражение для траектории (1), соответственно при $t < 0$ и $t > 0$, а в качестве углов рассеяния следует взять углы Δ и δ ($\sqrt{\Delta^2 + \delta^2}$ — угол рассеяния при $H \rightarrow 0$). Дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_0(\Delta, \delta)$ определяется как элемент площади поперечного сечения пучка, соответствующий рассеянию на углы Δ, δ . Поскольку в рассматриваемом случае ($\rho_{\text{макс}}/R \ll 1, \Delta, \delta \ll 1$) вклады в отклонение электрона в области взаимодействия от силы, действующей со стороны магнитного поля и кулоновской силы, аддитивны, то для сечения рассеяния на кулоновском центре Ze_0 можно воспользоваться формулой Резерфорда:

$$d\sigma_0 = \frac{4(Ze_0^2)^2 d\Delta d\delta}{\epsilon^2(\delta^2 + \Delta^2)^2}. \quad (9)$$

Для вычисления сечения тормозного излучения используем известный факт его факторизации в приближении мягких фотонов

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot d\omega. \quad (10)$$

При этом сечение $d\sigma$ разобьется на два слагаемых:

$$d\sigma = d\sigma^{(0)} + d\sigma^{(1)}, \quad (11)$$

которые имеют следующий смысл: $d\sigma^{(0)}$ представляет собой некогерентную часть сечения, связанную с излучением синхротронного типа $d\omega^{(0)}$, а $d\sigma^{(1)}$ является когерентной частью, связанной с излучением $d\omega^{(1)}$. Эта терминология аналогична принятой в работах [14 и 15]. Интеграл по углам рассеяния от когерентной части сечения тормозного излучения,

как и в случае $H=0$, логарифмически расходится. Он обрезается сверху при углах $(\delta, \Delta)_{\text{макс}} \sim m/\varepsilon$. Для нахождения минимальных углов рассеяния, дающих вклад в излучение $(\delta, \Delta)_{\text{мин}} = \frac{q_{\text{мин}}}{\varepsilon}$, следует учесть, что минимальная передача импульса [8]

$$q_{\text{мин}} \sim \frac{1}{l_{\text{ког}}} = \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2 \omega \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{2/3}\right]. \quad (12)$$

Для когерентной части сечения излучения получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma_{\pi}(\omega)}{d\sigma_{\sigma}(\omega)}\right)_{\text{ког}} &= \frac{4\sqrt{\pi} Z^2 e_0^6}{15m^2} y \left(\begin{array}{l} 9\gamma(y) - y\gamma'(y) \\ -3\gamma(y) - 9y\gamma'(y) + 2y^2\gamma''(y) \end{array} \right) \times \\ &\times \ln \left[\frac{\varepsilon^2}{m\omega} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{y}\right)} \right] \frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что выражение (13), просуммированное по поляризациям фотона, совпадает с формулой (12) работы [5] для сечения тормозного излучения, в которой следует перейти к пределу мягких фотонов, а при $\omega \gg \omega_c$ с соответствующим выражением в отсутствие поля [7, 8].

Некогерентную часть вероятности излучения в (11) следует рассматривать одновременно с эффектом $\sim e_0^2$, т. е. синхротронным излучением. Экспериментально наблюдаемой величиной является суммарный эффект, в который дают вклад все радиационные процессы e_0^2 , e_0^4 и $Z^2 e_0^6$. Учет их в случае мягких фотонов приводит к следующему выражению для спектрального распределения интенсивности излучения из единичного поперечного сечения пучка в интервале углов $(\Delta\varphi)$:

$$\Delta\bar{I}(\omega) d\omega = j_e \left(\frac{\Delta\varphi}{\Omega}\right) (dI^{(1)}(\omega) + n_Q \omega d\sigma_{\text{ког}}(\omega)). \quad (14)$$

Здесь $dI^{(1)}(\omega)$ есть интенсивность однофотонного синхротронного излучения [3], j_e — плотность потока падающих электронов, n_Q — плотность рассеивающих центров, причем предполагается, что последняя достаточно мала и можно пренебречь вкладом в $d\sigma_{\text{ког}}(\omega)$ от многократных столкновений.

Как видно из этой формулы, члены порядка e_0^4 в ней отсутствуют, так как в согласии с общими принципами квантовой электродинамики в мягкофотонном приближении вклад двухфотонного излучения сокращается с радиационными поправками и интенсивность излучения соответствует своему классическому значению $dI^{(1)} = dI_{\text{кл}}$.

Зависимость сечения тормозного излучения от частоты ω при $\varepsilon = 500$ МэВ и $H = 10^4$ э изображена на рис. 2. Радиус кривизны траектории $R = 1,7$ м, $\hbar/\omega_c = 110$ эВ, $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c = 107$ Å;

$$d\sigma_{\text{торм}}^{H=10^4\text{э}}(\omega)/d\omega \equiv d\sigma_{\text{ког}}^{H=10^4\text{э}}(\omega)/d\omega$$

есть кривая 1, а в отсутствии поля ($H=0$) — кривая 2. Как видно из этого рисунка, для частот $\omega \leq \omega_c$ наличие магнитного поля приводит к относительному уменьшению сечения тормозного излучения (по сравнению со случаем $H=0$).

¹ На стр. 14 работы [5] в формулах, соответствующих случаю $y \ll 1$, выражение под логарифмом следует домножить на y .

Приближение мягких фотонов в синхротронном излучении

Обсуждаемое приближение позволяет рассмотреть предельные случаи многофотонного синхротронного излучения. Тривиальной является ситуация, когда все излучаемые фотоны мягкие ($\sum_i \omega_i \ll \epsilon$). В этом случае фотоны излучаются некогерентно классическим током, представляющим собой окружность. Вероятность излучения n -фотонов в интервал углов ($\Delta\varphi$) «за один пролет электрона» согласно теории возмущений равна

$$d\omega^n = \prod_{i=1}^n d\omega_i, \quad (15)$$

где $d\omega_i = \bar{\omega}_i d\varphi_i d\omega_i$ ($\Delta\varphi$) — вероятность однофотонного излучения i -того фотона в этот же интервал углов.

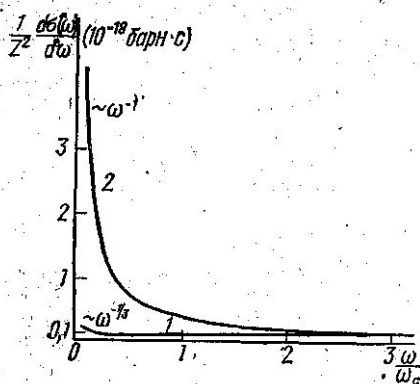


Рис. 2

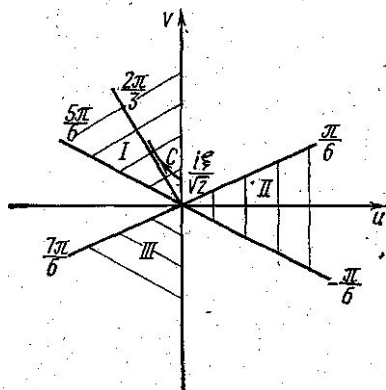


Рис. 3

При интегрировании $d\omega^n$ по конечному интервалу значений частот ω_i и направлений \mathbf{n}_i , одинаковому для всех квантов, следует ввести множитель $1/n!$, учитывающий тождественность фотонов [7, 8].

Применимость теории возмущений предполагает, что вероятность излучения n фотонов меньше вероятности однофотонного процесса. Это, как уже указывалось выше, приводит к условию $(\Delta\varphi) \ll m/\epsilon e_0^2$.

Если параметр $\chi = \frac{H}{H_0} \frac{\epsilon}{m} \ll 1$ (здесь $H_0 = m^2/e_0 = 4,41 \cdot 10^{13}$ э), из (15) легко получить, что вероятность излучения, например, двух фотонов в единицу времени с азимутальными углами φ_1 и φ_2 такими, что $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \Delta\varphi/2$, ($(\Delta\varphi) \ll 1$), равна

$$\omega_{\text{двухфот}} = \frac{25}{24} e_0^4 \left(\frac{e_0 H}{m} \right) \left(\frac{\epsilon}{m} \right) (\Delta\varphi).$$

Эта вероятность совпадает с некогерентным членом вероятности двухфотонного излучения, полученным Морозовым и Ритусом [15], так как в рассматриваемом случае ($\chi \ll 1$) фотоны во всей области синхротронного спектра являются мягкими и, следовательно, их излучение некогерентно (корреляции фотонов отсутствуют).

Рассмотрим процесс, в котором наряду с излучением жесткого фотона ω_0 излучается n мягких фотонов ω_i ($\sum_i \omega_i \ll \varepsilon - \omega_0, \omega_0$).

Вероятность процесса в этом случае также факторизуется [9]:

$$d\omega = d\omega_0 \prod_{i=1}^n d\omega_i, \quad (16)$$

причем основным процессом в этом случае является излучение жесткого фотона ω_0 , определяемое известной вероятностью $d\omega_0$ [3]. При вычислении $d\omega_i$ следует учесть, что область формирования жесткого фотона ω_0 значительно меньше области формирования мягких фотонов ω_i и соответственно угловое распределение уже. Поэтому следует провести «огрубление» масштаба углов излучения для мягких фотонов: $\psi_i \gg m/\varepsilon, m/(\varepsilon - \omega_0)$. Пусть далее $p_{1z} = 0$, а жесткий фотон испускается под азимутальным углом $\varphi_0 = 0$. Тогда вероятность излучения $d\omega_i$ мягкого фотона k_i может быть найдена по формулам (2), (8), если принять для траектории электрона выражение (1), которое описывает «мгновенное» изменение радиуса $R(t < 0) = R_1 \rightarrow R(t > 0) = R_2$ и энергии $\varepsilon_1 = \varepsilon \rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon - \omega_0$ при излучении жесткого фотона и в котором следует в нашем приближении положить $\delta = \Delta = 0$.

В результате мы получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega_i^\pi}{d\omega_i^\sigma} \right) &= \frac{4e_0^2}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{m} \right) 2^{-2/3} y \frac{d\omega}{\omega} d\varphi d\tau \times \\ &\times \left(\begin{array}{l} 2^{-2/3} y \tau^2 |g + (1+u)^{-2/3} e^{i\Phi} f|^2 \\ \left| \frac{\partial g}{\partial z_1} + (1+u)^{-1/3} e^{i\Phi} \frac{\partial f}{\partial z_2} \right| \end{array} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где аргументы функций g и f имеют вид

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{-2/3} y \tau^2, \quad z_2 = (1+u)^{-2/3} z_1, \\ \xi_1 &= -2^{-1/3} (\varphi\varepsilon/m) y^{1/2}, \quad \xi_2 = (1+u)^{-1/3} \xi_1, \end{aligned} \quad (18)$$

величина $u = \omega_0/(\varepsilon - \omega_0)$, а индекс i , нумерующий мягкие фотоны, в правой части формулы (17) опущен. При $\varphi_0 \neq 0$ в (18) следует заменить φ на $\varphi - \varphi_0$.

Выражение (17) вместе с (16) дает нам вероятность испускания жесткого фотона ω_0 , сопровождаемое испусканием n мягких фотонов ω_i ($i=1, \dots, n$) в приближении теории возмущений. Так как $d\omega_i$ (17) не зависит от угла φ_0 жесткого фотона, по этому углу в $d\omega_0$ может быть проведено интегрирование.

Условием применимости этого результата по-прежнему является малость интервала углов $|\varphi - \varphi_0| \ll m/\varepsilon e_0^2$. Это соответствует тому, что участок траектории, с которого собирается излучение, много меньше длины «свободного пробега», т. е. среднего расстояния между двумя последовательными актами испускания фотонов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Неполные функции Эйри $f(z, \xi)$ и $g(z, \xi)$ определяются посредством интегральных представлений

$$f(z, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{+\infty} e^{i(zx+x^3/3)} dx, \quad g(z, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{i(zx+x^3/3)} dx$$

и могут быть выражены через неполные функции Бесселя индекса $1/3$ ([16] с. 116). Отметим, что

$$f(z, \xi) + g(z, \xi) = \Phi(z), \quad 2f(z, 0) = \Phi(z) + i\Upsilon(z), \quad (19)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos\left(xz + \frac{x^3}{3}\right) dx, \quad \Upsilon(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin\left(xz + \frac{x^3}{3}\right) dx.$$

Здесь $\Phi(z)$ — функция Эйри, $\Upsilon(z)$ — ипсилон-функция, свойства которых хорошо известны (см., например, [17, 18]).

Определим асимптотические разложения $f(z, \xi)$ и $g(z, \xi)$ при $z > 0$ и действительном ξ . В силу (19), а также равенства $f(z, \xi) = \Phi(z) - f^*(z, -\xi)$, достаточно найти асимптотику $f(z, \xi)$ при $\xi > 0$. Для этого воспользуемся методом наискорейшего спуска [19]. Сделав замену переменной интегрирования $x = -i\sqrt{z}\tau$, представим $f(z, \xi)$ в виде

$$f(z, \xi) = -\frac{i\sqrt{z}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{i\xi}{\sqrt{z}}}^{i\infty} d\tau e^{z^{3/2}(\tau - \tau^3/3)}.$$

Путь интегрирования (см. рис. 3) начинается из точки $i\xi/\sqrt{z}$ и уходит в бесконечность в I секторе. Уравнение кривой наискорейшего спуска C:

$$v(v^2 - 3u^2 + 3) = 3\alpha \quad \alpha = \frac{1}{z^{3/2}} \left(\xi z + \frac{\xi^3}{3} \right), \quad \tau = u + iv.$$

Введем на этой кривой действительный параметр $t \geq 0$:

$$\tau - \frac{\tau^3}{3} = i\alpha - t, \quad (20)$$

$$f(z, \xi) = -\frac{i\sqrt{z}}{2\sqrt{\pi}} e^{i(z\xi + \xi^3/3)} \int_0^{+\infty} e^{-z^{3/2}t} \frac{dt}{dt}. \quad (21)$$

В силу теоремы об обратных функциях уравнение (20) имеет единственное решение:

$$\tau = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots, \quad c_0 = \frac{i\xi}{\sqrt{z}},$$

$$c_1 = -\frac{z}{z + \xi^2}, \quad c_2 = \frac{i\xi z^{5/2}}{(z + \xi^2)^2}, \dots$$

Подставляя это решение в (21) и интегрируя, получим ($\xi > 0$)

$$f(z, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i(z\xi + \xi^3/3)} \left(\frac{i}{z + \xi^2} + \frac{2\xi}{(z + \xi^2)^2} + \dots \right). \quad (22)$$

Аналогично находим для $f'_z(z, \xi)$:

$$f'_z(z, \xi) = -\frac{e^{i(z\xi + \xi^3/3)}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\xi}{z + \xi^2} + i \frac{(z - \xi^2)}{(z + \xi^2)^2} + \dots \right), \quad (23)$$

(22), (23) дают искомые асимптотические разложения по z и ξ .

При $z \ll 1$, $f(z, \xi)$ и $f'_z(z, \xi)$ выражаются через неполные гамма-функции ($\xi > 0$):

$$f(0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\pi/6}}{3^{2/3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}, -\frac{i\xi^3}{3}\right),$$
$$f'_z(0, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{i5\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}, -i\frac{\xi^3}{3}\right).$$

Выпишем также разложения $f(z, \xi)$ и $f'_z(z, \xi)$ при малых ξ :

$$f(z, \xi) = f(z, 0) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\xi + iz \frac{\xi^2}{2} + \dots \right),$$
$$f'_z(z, \xi) = f'_z(z, 0) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(-i \frac{\xi^2}{2} + \frac{z\xi^2}{6} + \dots \right).$$

В заключение авторы приносят благодарность проф. А. А. Соколову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erber T. «Acta Phys. Austr. Suppl.», 1971, 8, 323.
2. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, 1964, 46, 776 и 1768.
3. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.
4. Байер В. Н., Катков В. М. ДАН СССР, 1972, 207, 68.
5. Жуковский В. Ч. ЖЭТФ, 1974, 66, 9.
6. Bloch F., Nordsieck A. «Phys. Rev.», 1937, 52, 54.
7. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория, ч. 1. М., 1968.
8. Байер В. Н., Катков В. М., Федин В. С. Излучение релятивистских электронов. М., 1973.
9. Волощенко А. М., Павленко Ю. Г. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. III, физ., астрон.», 1976, 17, № 3, 384.
10. Schwinger T. — «Phys. Rev.», 1949, 75, 1912.
11. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., 1965.
12. Asprens D. E. «Phys. Rev.», 1966, 147, 554.
13. Волощенко А. М., Павленко Ю. Г. «Изв. вузов. Физика», 1976, № 3, 92.
14. Ritus V. I. «Nucl. Phys.», 1972, B 44, 236.
15. Mogozyov D. A., Ritus V. I. «Nucl. Phys.», 1975, B 86, 309.
16. Агрест М. М., Максимов М. З. Теория неполных цилиндрических функций и их применения. М., 1965.
17. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., 1962.
18. Ритус В. И. В сб.: Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма. М., 1972.
19. Копсон Э. Асимптотические разложения. М., 1966.

Поступила в редакцию
8.12 1975 г.

Кафедра
теоретической физики