Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1976

УДК 530.12 : 531.51

В. И. ХЛЕБНИКОВ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИСТЕМ БЕЗ ВРАЩЕНИЯ (I)

Получена серия решений уравнений Эйнштейна—Максвелла с Λ-членом, описывающая гравитационное поле квазистационарных сосредоточенных систем, содержащих электрический и магнитный заряды. Найденные метрики принадлежат типу D по Петрову—Пирани и обладают нулевым вращением и сдвигом. Приведена физическая интерпретация полученных решений. В настоящей, первой части работы содержится постановка задачи в терминах метода спиновых коэффициентов.

Формализм Ньюмана — Пенроуза (НП-формализм), или метод спиновых коэффициентов, был окончательно сформулирован в 1962 г. [1, 2] и с тех пор находит все возрастающее применение (см., например, [1—4, 6, 8, 9, 11—14]). Мы приведем лишь несколько основных, на наш взгляд, результатов, иллюстрирующих плодотворность применения НП-формализма в исследованиях уравнений Эйнштейна и Эйнштейна—Максвелла. Из этих работ мы заимствуем некоторые методы интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Отметим работы Ньюмана, Унти и Тамбурино [3, 4], в первой же из которых были описаны сферические, цилиндрические (и плоские) гравитационные волны, содержащие нормальную конгруэнцию геодезических лучей [5], а во второй изучено асимптотическое поведение вакуумных метрик наиболее общего типа I по Петрову. В дальнейшем в [6] была получена серия НУТ (серия из трех метрик, соответствующих источникам тардионного, люксонного и тахионного типа [7]), являющаяся ближайшим обобщением метрики Шварцщильда. В фундаментальном исследовании [8] Киннерслею удалось в явном виде найти все вакуумные метрики типа D по Петрову, в том числе и серию Керра-НУТ, содержащую шесть решений.

Следующим этапом в изучении точных решений уравнений Эйнштейна явился переход к метрикам типа II. Пользуясь методом спиновых коэффициентов, Талбот [9] записал наиболее общий вид интервала, отвечающего вакуумным гравитационным полям указанного типа. Метрическая форма оказалась зависящей от трех аналитических функций, для определения которых имеется система трех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, неинтегрируемая в квадратурах. Тот же результат в работе [10] был получен другим методом. Наконец, наиболее общий вид интервала типа II по Петрову ($\sigma=0$)

для уравнений Эйнштейна — Максвелла, выписанный в [11], зависит уже от пяти аналитических функций, удовлетворяющих системе пяти дифференциальных уравнений.

Формализм Ньюмана — Пенроуза с успехом применяется также к изучению конформно-плоских решений уравнений Эйнштейна — Максвелла [12, 13] и решений с тензором энергии-импульса, отвечающим пространственному распределению вещества. Случай однородного распределения вещества, рассмотренный в [14], приводит к легко решаемой алгебраической системе НП-уравнений.

Мы, следуя [11], продолжим [6, 8]. Наша работа является обобщением этих работ на случай квазистационарного электромагнитного поля.

§ 1. Изотропная тетрада и спиновые коэффициенты

В каждой точке четырехмерного риманова пространства с сигнатурой —2 введем тетрадную систему $z_{M\mu} = (l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu)$ со свойствами квазиортогональности

$$l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1; \quad l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0, \tag{1}$$

состоящую из двух комплексных комплексно-сопряженных $(m_\mu, \bar{m}_\mu)$ и двух действительных (l_μ, n_μ) светоподобных векторов. При этом тетрадные (заглавные латинские) индексы $M, N, \ldots = 1, 2, 3, 4$, поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора плоского пространства-времени

$$\eta_{MN} = \mu^{MN} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix},$$

а тензорные (греческие) индексы, изменяющиеся также в пределах от 1 до 4 с—с помощью тензора $g_{\mu\nu}$. Введем далее расщепление метрического тензора:

$$g_{\mu\nu} = z_{M\mu} z_{N\nu} \eta^{MN} = l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \bar{m}_\nu - m_\nu \bar{m}_\mu$$

и комплексные коэффициенты вращения Риччи: $\gamma_M{}^{NP} = z_{M\mu;\nu} z^{N\mu} z^{P\nu}$.

Тогда, следуя Ньюману и Пенроузу [1], мы сможем записать спиновые коэффициенты в виде

$$k = \gamma_{131} = l_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu, \quad \nu = -\gamma_{242} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu,$$

$$\rho = \gamma_{134} = l_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu, \quad \mu = -\gamma_{243} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu,$$

$$\sigma = \gamma_{133} = l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu, \quad \lambda = -\gamma_{244} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu,$$

$$\tau = \gamma_{132} = l_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu, \quad \pi = -\gamma_{241} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{124} - \gamma_{344}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu \bar{m}^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu),$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma_{123} - \gamma_{343}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu),$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{122} - \gamma_{342}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu),$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{121} - \gamma_{341}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu).$$

Выпишем также тетрадные компоненты тензоров Вейля и Максвелла, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем:

$$\Psi_0 = -C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha m^\beta l^\gamma m^\delta, \quad \Psi_1 = -C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha n^\beta l^\gamma m^\delta,$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} (l^\alpha n^\beta l^\gamma n^\delta - l^\alpha n^\beta m^\gamma \bar{m}^\delta),$$

$$\Psi_3 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha n^\beta n^\gamma \bar{m}^\delta, \quad \Psi_4 = -C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha \bar{m}^\beta n^\gamma \bar{m}^\delta;$$

$$\Phi_0 = F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu), \quad \Phi_2 = F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu.$$

§ 2. Уравнения Эйнштейна, Максвелла и тождества Бьянки в формализме Ньюмана—Пенроуза

Определив внутренние производные

$$D\varphi = \varphi_{;\mu} l^\mu, \quad \Delta\varphi = \varphi_{;\mu} n^\mu,$$

$$\delta\varphi = \varphi_{;\mu} m^\mu, \quad \bar{\delta}\varphi = \varphi_{;\mu} \bar{m}^\mu,$$

запишем уравнения Максвелла в терминах спиновых коэффициентов:

$$D\Phi_1 - \bar{\delta}\Phi_0 = (\pi - 2\alpha)\Phi_0 + 2\rho\Phi_1 - k\Phi_2,$$

$$D\Phi_2 - \bar{\delta}\Phi_1 = -\lambda\Phi_0 + 2\pi\Phi_1 + (\rho - 2\varepsilon)\Phi_2,$$

$$\delta\Phi_1 - \Delta\Phi_0 = (\mu - 2\gamma)\Phi_0 + 2\tau\Phi_1 - \sigma\Phi_2,$$

$$\delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1 = -\nu\Phi_0 + 2\mu\Phi_1 + (\tau - 2\beta)\Phi_2.$$

Из уравнений Эйнштейна [1, 2] приведем лишь три, непосредственно которыми будем пользоваться:

$$D\rho - \bar{\delta}k = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\rho - \bar{k}\tau - k(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_0\bar{\Phi}_0, \tag{2}$$

$$D\tau - \Delta k = (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\varepsilon - \bar{\varepsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})k + \Psi_1 + \Phi_0\bar{\Phi}_1, \tag{3}$$

$$\delta\tau - \Delta\sigma = \mu\sigma + \bar{\lambda}\rho + (\tau + \beta - \bar{\alpha})\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma - k\bar{\nu} + \Phi_0\bar{\Phi}_2. \tag{4}$$

Весьма громоздкие тождества Бьянки, выписанные в [1, 2] (см. формулы (А3)), также оказываются полезными при интегрировании системы НП-уравнений.

§ 3. Специальный выбор координат и калибровка тетрады

Условия квазиортогональности (1) определяют векторы l_μ, n_μ, m_μ и $\bar{m}_\mu$ введенной нами в § 1 изотропной тетрады с точностью до ограниченной 6-параметрической группы Лорентца, которая разбивается на четыре подгруппы:

а) двухпараметрические нулевые вращения вокруг l_μ:

$$l'_\mu = l_\mu, \; m'_\mu = m_\mu + a l_\mu, \; n'_\mu = n_\mu + a\bar{m}_\mu + \bar{a} m_\mu + a\bar{a} l_\mu; \tag{5}$$

б) двухпараметрические нулевые вращения вокруг n_μ:

$$n'_\mu = n_\mu, \; m'_\mu = m_\mu + b n_\mu, \; l'_\mu = l_\mu + b\bar{m}_\mu + \bar{b} m_\mu + b\bar{b} n_\mu; \tag{6}$$

в) пространственноподобные вращения в m_μ-, $\overline{m}_\mu$-плоскости:

$$n'_\mu = n_\mu,\ l'_\mu = l_\mu,\ m'_\mu = e^{i\theta} m_\mu,\ \overline{m}'_\mu = e^{i\theta}\overline{m}_\mu; \tag{7}$$

г) однородные преобразования Лорентца в l_μ-, n_μ-плоскости:

$$m'_\mu = m_\mu,\ \overline{m}'_\mu = \overline{m}_\mu,\ n'_\mu = An_\mu,\ l'_\mu = A^{-1} l_\mu. \tag{8}$$

В формулах (5)—(8) a, b — комплексные и θ, A — действительные функции четырех переменных.

В случае метрик типа D тензор Вейля имеет четыре попарно совпадающих главных гравитационных световых направления, которые в силу теоремы Гольдберга — Сакса являются бессдвиговыми геодезическими. Выберем параметр b в преобразовании (6) так, чтобы вектор l'_μ тетрады совместился с одним из таких направлений, что повлечет за собой автоматически совмещение этого вектора с одним из главных нулевых направлений тензора Максвелла. Фиксированный подобным образом вектор l_μ обеспечит нам выполнение следующих равенств:

$$\sigma = 0;\quad \Phi_0 = 0;\quad \Psi_0 = \Psi_1 = 0, \tag{A1}$$

значительно упрощающих НП-систему. Поскольку теперь l_μ — касательный вектор к световой геодезической, мы можем, взяв в качестве одной из координат $x^2 = r$ аффинный параметр вдоль этой геодезической, привести l_μ к виду

$$l^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial r} = \{0, 1, 0, 0\};\quad l_{\mu;\nu} l^\nu = 0, \tag{A2}$$

что в силу определения спиновых коэффициентов повлечет за собой

$$k = 0. \tag{A3}$$

При этом свобода общих координатных преобразований, не нарушающих условий (A2) и (A3), сведется к

$$r' = r + R^0(x^1, x^3, x^4);\quad x^{a'} = x^{a'}(x^a) \tag{A4}$$

(малые латинские буквы пробегают значения 1, 3, 4), а однородные преобразования Лорентца (8) примут вид

$$n'_\mu = A^0 n_\mu,\ l'_\mu = (A^0)^{-1} l_\mu,\ r' = A^0(x^a) r, \tag{A5}$$

где индекс 0 у величины здесь и всюду в дальнейшем будет означать независимость ее от аффинного параметра $x^2 = r$.

§ 4. Монополь Дирака в классической электродинамике, квантовой механике и общей теории относительности

В качестве исходных постулатов для построения теории магнитного заряда обычно используют два предположения:

а) покоящийся магнитный заряд является источником кулоновского магнитного поля

$$\mathbf{H} = \frac{gR}{R^3} = -g\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right),$$

где g — магнитный заряд;

б) на нерелятивистский электрон, движущийся в поле покоящегося магнитного заряда, действует сила Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) = -\frac{eg}{c}\left(\mathbf{v}\times\operatorname{grad}\left(\frac{1}{R}\right)\right).$$

Желая получить электродинамику с монополями с помощью обычной вариационной процедуры из лагранжиана $L = L_{\text{своб}} + L_{\text{вз}}$, где $L_{\text{своб}}$ — лагранжиан свободного движения, а $L_{\text{вз}}$ — «минимальное» взаимодействие $L_{\text{вз}} = j_\mu A^\mu$, мы вынуждены считать, что вектор-потенциал имеет сингулярность в виде одной или нескольких бесконечных или полубесконечных нитей. Квантовомеханическое условие ненаблюдаемости нити позволяет избавиться от нефизических δ-образных членов в силе Лоренца и получить (дираковское или швингеровское) соотношение для «квантования» магнитного заряда (k — целое число):

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{k}{2} \text{ или } \frac{eg}{\hbar c} = k.$$

В общей теории относительности магнитный заряд появляется как чисто мнимая добавка к обычному электрическому заряду в решениях уравнений Эйнштейна — Максвелла. Так, тетрадные компоненты тензора поля для метрики Демьянского — Ньюмана имеют вид [15]

$$\Phi_0 = 0,\ \Phi_1 = (e + ig)\rho^2/\sqrt{2},\ \Phi_2 = -ia\sin\theta\,(e + ig)\rho^3,$$

где оптический скаляр ρ определен обычным образом:

$$\rho = \frac{1}{2}\left[-l^\mu{}_{;\mu} + i\left(l_{[\mu;\nu]}\, l^{\mu;\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{9}$$

Проблема магнитного монополя — почти ровесница квантовой электродинамики. Большое количество статей, посвященных этой теме, особенно появившихся за последнее десятилетие, позволяют нам больше на ней здесь не останавливаться, а интересующихся этими вопросами отослать к работам [16, 17].

И в заключение этого пункта отметим следующее. Мы не обсуждаем вопросов реальности или физической неприемлемости решений типа магнитного монополя. Более того, мы не знаем, существуют ли монополи вообще. Но если они существуют, то квазистационарная система монополей будет описываться одним из найденных нами решений.

§ 5. Замечание о мультипольном характере электромагнитного поля

Как известно, в классической электродинамике электромагнитное поле сосредоточенной системы (электрических и магнитных) зарядов допускает разложение в ряд по степеням $1/R$, где R — расстояние от системы зарядов до точки наблюдения. Так, поле магнитного диполя выражается формулами

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{R}, t) = \frac{\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{m}}(t')}{c^2R} + \frac{\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{m}}(t')}{cR^2};\quad t' = t - \frac{R}{c}, \tag{10}$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{R}, t) = \frac{3\mathbf{n}\cdot(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{m}}{R^3} + \frac{3\mathbf{n}\cdot(\dot{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}) - \dot{\mathbf{m}}}{cR^2} + \frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{m}})}{c^2R}. \tag{11}$$

Поле электрического диполя получится из формул (10), (11) путем замены $\mathbf{m}\to\mathbf{p}$, $\mathbf{H}_m\to\mathbf{E}_e$, $\mathbf{E}_m\to-\mathbf{H}_e$. Чем выше степень мультипольности

системы, тем более высокого порядка члены содержатся в разложении полей. Аналогичная ситуация имеет место и в общей теории относительности. Янис и Ньюман [18] произвели мультипольное разложение тетрадных компонентов тензора Максвелла в плоском пространстве-времени:

а) для кулоновского монополя (a_0 — заряд)

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = \frac{a_0}{r^2}, \quad \Phi_2 = 0, \tag{12}$$

б) для диполя (a_1 — дипольный момент)

$$\Phi_0 = a_1(u)\cdot\sin\theta/r^3,$$

$$\Phi_1 = -\sqrt{2}\,\dot{a}_1\cos\theta/r^2 - \sqrt{2}\,a_1\cos\theta/r^3,$$

$$\Phi_2 = -\ddot{a}_1\sin\theta/r - \dot{a}_1\sin\theta/r^2 - a_1\sin\theta/2r^3$$

и т. д. Для пространств типа II мультипольное разложение тензора Максвелла приведено в работе Линда [11]:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = \Phi_1^0\rho^2,$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21}^0\rho + \Phi_{22}^0\rho^2 + \Phi_{23}^0\rho^3,$$

где ρ — определенный в (9) оптический скаляр.

Несмотря на то, что в общем случае риманова пространства мы не можем привести формул мультипольного разложения для тетрадных компонентов тензора Максвелла, ясно, что тип (по Петрову) пространства-времени накладывает ограничение на степень мультипольности присутствующих в нем материальных полей.

§ 6. Квазистационарные системы в классической электродинамике и общей теории относительности

Поле заряда, движущегося с малой скоростью $\mathbf{v}$ в ограниченной области, определяется из потенциалов Лиенара — Вихерта и имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} + 3\,\frac{e\mathbf{R}\cdot(\mathbf{R}\cdot\mathbf{v})}{cR^4} - \frac{e\mathbf{v}}{cR^2} + \frac{e\mathbf{R}\times(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{v}})}{c^2R^3}\Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}}, \tag{13}$$

$$\mathbf{H} = \frac{e\mathbf{v}\times\mathbf{R}}{cR^3} + \frac{e\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{R}}{c^2R^2}\Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}}, \tag{14}$$

где R — расстояние от какой-либо точки области, в которой происходит движение заряда, до точки наблюдения. Первые три члена в выражении (13) и первый член в (14) преобладают на малых расстояниях от заряда (в квазистационарной зоне). Электрическое поле в этой зоне сводится в основном к кулоновскому полю, а магнитное — описывается формулой Био-Савара. На больших расстояниях от заряда (в волновой зоне) доминируют последние члены в $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, описывающие поле излучения. Положение границы квазистационарной и волновой зоны определяется условием

$$\frac{e/R_{\text{гр}}^2}{e\,|\dot{\mathbf{v}}|/(c^2R_{\text{гр}})} \sim 1, \quad R_{\text{гр}} \sim a\left(\frac{c}{v}\right)^2,$$

где $a \sim v^2/|\mathbf{v}|$ — величина порядка размеров той области, в которой происходит движение заряда.

Будем называть квазистационарными системами такие, поле которых пропорционально $1/R^2$. Формулы (13) и (14) показывают, что движущийся заряд можно считать квазистационарной системой вплоть до расстояний $R \leqslant R_{\text{гр}}$. Распределенные в ограниченной области сферически-симметричным образом радиально пульсирующие электрические или магнитные заряды тоже образуют квазистационарную систему, поскольку порождают чисто кулоновское поле.

В качестве разумного общерелятивистского обобщения понятия квазистационарных систем будем считать, что тензор Максвелла таких систем имеет асимптотику:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = a_0/r^2, \quad \Phi_2 = 0, \tag{A6}$$

где r — уже введенный нами аффинный параметр, играющий роль расстояния. Как видим, в плоском пространстве-времени определенные таким образом квазистационарные системы соответствуют монопольному приближению Яниса — Ньюмана (12).

§ 7. Постановка основной задачи

Прежде всего конкретизируем выбор тетрады требованием, чтобы векторы m_μ и n_μ переносились параллельно самим себе вдоль направления l_μ:

$$m_{\mu;\nu} l^\nu = \bar{\pi} l_\mu - k n_\mu + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) m_\mu = 0,$$

$$n_{\mu;\nu} l^\nu = -(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) n_\mu + \pi m_\mu + \bar{\pi} \bar{m}_\mu = 0,$$

что влечет за собой

$$\varepsilon = \pi = 0. \tag{A7}$$

При этом пространственноподобные вращения (7), не нарушающие условия (A7), возможны лишь в случае

$$\theta = \theta^0(x^1, x^3, x^4). \tag{A8}$$

Дальнейшее упрощающее предположение заключается в отсутствии вращения у конгруэнции геодезических лучей:

$$l_{[\alpha;\beta]} l^{\alpha;\beta} = 0, \quad \rho = \bar{\rho}, \tag{A9}$$

которое вместе с (A1) — (A3) и (A7) позволяет проинтегрировать уравнение (2) и с помощью (A4) привести результат к виду $\rho = -1/r$. Интегрирование уравнения (3) при тех же условиях дает нам $\tau = \tau^0 \rho$, где τ^0 — постоянная интегрирования. Заметив далее, что эта величина при нулевых a^0-вращениях (5) преобразуется по закону $\tau^{0\prime} = \tau^0 + a^0$, мы можем соответствующей фиксацией вектора n_μ тетрады добиться

$$\tau = 0, \tag{A10}$$

после чего уравнение (4) даст

$$\lambda = 0. \tag{A11}$$

Положим, наконец:

$$\Psi_3 = \Psi_4 = 0; \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_1 = \Phi_1^0/r^2, \tag{A12}$$

что будет гарантировать нам, во-первых, принадлежность искомых нами решений к типу D по Петрову, и во-вторых, соответствие выбранного нами тензора Максвелла (A1, A12) общим асимптотическим формулам [11] и определению квазистационарных систем (A6). Наша задача свелась теперь к интегрированию полной системы НП-уравнений в предположениях (A1—A12). Общее решение указанной системы будет получено в нашей следующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Newman E., Penrose R. «J. Math. Phys.», 1962, 3, 566.
2. Newman E., Penrose R. «J. Math. Phys.», 1963, 4, 998.
3. Newman E., Tamburino L. «J. Math. Phys.», 1962, 3, 902.
4. Newman E., Unti T. «J. Math. Phys.», 1962, 3, 891.
5. Сакс Р. В сб.: Гравитация и топология. Актуальные проблемы, под ред. Д. Д. Иваненко. М., 1966.
6. Newman E., Tamburino L., Unti T. «J. Math. Phys.», 1963, 4, 915.
7. Биланюк О., Сударшан Е. Эйнштейновский сборник, 1973, М., 1974.
8. Kinnersley W. «J. Math. Phys.», 1969, 10, 1195.
9. Talbot C. «Commun. Math. Phys.», 1969, 13, 45.
10. Robinson I., Robinson J. R. «Intern. J. Theor. Phys.», 1969, 2, 231.
11. Lind R. «General Rel. Grav.», 1974, 5, 25.
12. Tarig N., Tupper B. «J. Math. Phys.», 1974, 15, 2232.
13. Mc Lenaghan R. G., Tarig N., Tupper B. «J. Math. Phys.», 1975, 16, 829.
14. Ozsvath I. «J. Math. Phys.», 1965, 6, 590.
15. Семенов В. П. «Изв. вузов. Физика», 1974, № 12, 146.
16. В сб.: Монополь Дирака, под ред. Б. М. Болотовского и Ю. Д. Усачева. М., 1970.
17. Стрижев В. И., Томильчик Л. М. «Физика элем. частиц и атомного ядра», 1973, 4, 187.
18. Janis A., Newman E. «J. Math. Phys.», 1965, 6, 902.

Поступила в редакцию
7.8 1975 г.

Кафедра
теоретической физики