Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1976

УДК 549.121.7

И. П. ИВАНЕНКО, А. А. КИРИЛЛОВ, Ю. И. ПАСХАЛОВ

О ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ КАСКАДНОЙ ТЕОРИИ

В работе проведено обоснование «q-способа» решения уравнений элекромагнитной каскадной теории и изучается развитие этого метода для учета процессов с неоднородными сечениями.

В работе проводится математическое обоснование и развитие «q-способа» [1—3], что расширяет круг решаемых задач, дает оценку точности получаемых результатов.

Как известно, «q-способ» сводит решение исходной интегродифференциальной системы уравнений каскадной теории к решению линейного дифференциального уравнения путем аппроксимации интегрального оператора, описывающего развитие одномерного ливня. Для этого исходная система относительно $P(E_0, E, t)$ и $\Gamma(E_0, E, t)$ функций распределения электронов и фотонов с энергией E на глубине t в ливне, образованном электроном с энергией E_0, преобразуется по Лапласу. Затем из нее исключается $\Gamma(E_0, E, \lambda)$ — образ Лапласа функции $\Gamma(E_0, E, t)$ — и получается соотношение

$$L[P(E_0, E, \lambda)] = \delta(E - E_0). \tag{1}$$

Физическая постановка задачи и подробная запись $L[P(E_0, E, \lambda)]$ имеются в [1—3]. Для упрощения оператора $L[P(E_0, E, \lambda)]$ вводится параметр s и $\int\limits_E^{E_0} E'^s L[P(E_0, E', \lambda)]\, dE'$ приводится к виду

$$\int\limits_E^{E_0} E'^s L[P(E_0, E', \lambda)]\, dE' = \int\limits_E^{E_0} P(E_0, E', \lambda)\, \varphi(E, E', \lambda, s)\, dE'. \tag{2}$$

Для сечений Бете — Гайтлера в форме полного экранирования [3] функция $\varphi(E, E', \lambda, s)$ представляется следующим образом:

$$\varphi(E, E', \lambda, s) = \left\{\psi(\lambda, s) E'^s + E^s f\left(\frac{E}{E'}, \lambda, s\right)\right\}.$$

В [1—3] было замечено, что если s выбрать так, чтобы $\psi(\lambda, s) = 0$, то $\varphi(E, E', \lambda, s)$ медленно меняется с изменением отношения E/E', так как в $f\left(\frac{E}{E'}, \lambda, s\right)$ вся энергетическая зависимость сведена в один аргумент и в физически интересных случаях зависимостью от первого аргумента практически можно пренебречь. В этом случае (2) может быть представлено

$$\int\limits_{E}^{E_0} E'^s L[P(E_0, E', \lambda(s))]\,dE' \approx E^s f\left(\frac{E}{E'}, \lambda(s)\right) \int\limits_{E}^{E_0} P(E_0, E', \lambda(s))\,dE' \approx$$

$$\approx E^s f(0, \lambda(s))\, N(E_0, E, \lambda(s)). \tag{3}$$

В общем случае введение

$$q(E, s) = \frac{-1}{N(E_0, E, s)} \int\limits_{E}^{E_0} \frac{\partial N(E_0, E', s)}{\partial E'} \times \tag{4}$$

$$\times f\left(\frac{E}{E'}, \lambda, s\right) dE'$$

позволяет получить соотношение, аналогичное (3):

$$\int\limits_{E}^{E_0} E'^s L[P(E_0, E', \lambda(s))]\,dE' = E^s q(E, s)\, N(E_0, E, s). \tag{5}$$

Дифференцированием (5) по E получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial N}{\partial E} + \left(\frac{s}{E} + \frac{\partial \ln q(E, s)}{\partial E}\right) N(E_0, E, s) = \frac{\delta(E_0 - E)}{\partial(E, s)},$$

которое совместно с (4) позволяет вычислить $q(E, s)$ и $N(E_0, E, s)$. Обычно относительно функции $q(E, s)$ делались некоторые допущения, например, допущения, использованные при получении приближенного равенства (3), эквивалентны тому, что $q(E, s)$ вообще не зависит от E. Для ряда задач корректность допущений можно было обосновать и проверить.

Рассмотрение задачи, как поиска решения интегрального уравнения (2), позволяет не делать никаких допущений относительно поведения $q(E, s)$ и обосновать необходимость выбора функции $\lambda(s)$. Вычислив левую часть (2), с учетом расходимости сечений и соотношения (1) получаем

$$E_0^s = E^s \int\limits_{E}^{E_0} P(E_0, E', \lambda) \frac{\varphi(E, E', \lambda, s)}{E^s}\, dE'. \tag{6}$$

Используя теорему о среднем, утверждаем, что существует $q(E_0, E, \lambda, s)$, такое, что

$$\int\limits_{E}^{E_0} P(E_0, E', \lambda) \frac{\varphi(E, E', \lambda, s)}{E^s}\, dE' = q(E_0, E, \lambda, s) \int\limits_{E}^{E_0} P(E_0, E', \lambda)\, dE'. \tag{7}$$

Из (7) с учетом (6) имеем

$$\int_{E}^{E_0} P(E_0, E', \lambda)\, dE' = \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{q(E_0, E, \lambda, s)}. \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по E, получим выражение для $p(E_0, E, \lambda)$ через введенное $q(E_0, E, \lambda, s)$:

$$P(E_0, E, \lambda) = s\left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E}\, \frac{1}{q(E_0, E, \lambda, s)} + \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{\frac{\partial}{\partial E} q(E_0, E, \lambda, s)}{q^2(E_0, E, \lambda, s)}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получим

$$\int_{E}^{E_0} \left[s\left(\frac{E_0}{E'}\right)^s \frac{1}{E'}\, \frac{1}{q} + \left(\frac{E_0}{E'}\right)^s \frac{\frac{\partial}{\partial E'} q}{q^2} \right] \times \frac{\varphi(E, E', \lambda, s)}{E^s}\, dE' - \left(\frac{E_0}{E}\right)^s = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) эквивалентно (6), но является уравнением Вольтерра первого рода относительно функции $q(E_0, E, \lambda, s)$. Применение традиционных методов [4] для решения уравнений (6), (10) во многих случаях затруднительно, в то же время свойства уравнений (10) позволяют получить решение задачи с нужной точностью. Заметим, во-первых, что на решении уравнения интегральное слагаемое (10) является убывающей функцией, причем при $E \ll E_0$ его величина существенно меньше, чем при $E \leqslant E_0$, во-вторых, что, если решение не является сильно изменяющейся функцией, второе слагаемое в квадратных скобках мало по сравнению с первым. Приближенное решение, будучи подставлено в (10), определяет $\Delta(E_0, E, s, \lambda, q(E_0, E, s, \lambda))$-невязку и задача сводится к минимизации этой невязки. Можно показать, что относительная погрешность решения δ и невязка связаны следующим соотношением:

$$\delta \approx \left(\frac{E}{E_0}\right)^s \Delta(E_0, E, s, \lambda, q(E_0, E, s, \lambda)). \tag{11}$$

Приведем пример вычисления и минимизации невязки для сечений Бете — Гайтлера в форме полного экранирования [3]. Найдем приближение к решению в классе констант, тогда из (10) имеем:

$$\int_{E}^{E_0} \left[s\left(\frac{E_0}{E'}\right)^s \frac{1}{E'}\, \frac{1}{q(s, \lambda)} \right] \frac{\varphi(E, E', \lambda, s)}{E^s}\, dE' - \left(\frac{E_0}{E}\right)^s = \Delta(E_0, E, s, \lambda, q(s, \lambda)),$$

где

$$\varphi(E,\ E',\ \lambda,\ s)=E'^{s}\psi(\lambda,\ s)+E'^{s}\int\limits_{0}^{\frac{E}{E'}}\frac{u^{s}}{1-u}\,du-$$

$$-E^{s}\frac{B(s)\,C(s)}{\lambda+\sigma_{0}}\left(\frac{E}{E'}s-s-1\right).$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\Delta=\left(\frac{E_{0}}{E}\right)^{s}\left\{\frac{s}{q(s,\ \lambda)}\left[\psi(\lambda,\ s)\ln E_{0}-\psi(\lambda,\ s)\ln E+\right.\right.$$

$$+\frac{2s+1}{s(s+1)}\frac{B(s)\,C(s)}{\lambda+\sigma_{0}}-\frac{s+1}{s}\frac{B(s)\,C(s)}{\lambda+\sigma_{0}}\left(\frac{E}{E_{0}}\right)^{s}+$$

$$+\frac{s}{s+1}\cdot\frac{B(s)\,C(s)}{\lambda+\sigma_{0}}\left(\frac{E}{E_{0}}\right)^{s+1}-\int\limits_{\frac{E}{E_{0}}}^{1}\frac{u^{s}}{1-u}\ln u\,du+$$

$$\left.\left.+\ln E_{0}\int\limits_{0}^{\frac{E}{E_{0}}}\frac{u^{s}}{1-u}\,du-\ln E\int\limits_{0}^{\frac{E}{E_{0}}}\frac{u^{s}}{1-u}\,du\right]-1\right\}. \qquad (12)$$

Из (12) видно, что для существования решения в классе констант необходимо использовать свободный параметр s так, чтобы $\psi(\lambda,\ s)=0$.

Выберем

$$q(s)=s\left(\frac{2s+1}{s(s+1)}\frac{B(s)\,C(s)}{\lambda+\sigma_{0}}-\int\limits_{0}^{1}\frac{u^{s}}{1-u}\ln u\,du\right), \qquad (13)$$

тогда величину невязки определяет четвертый член в квадратных скобках. Можно считать, что в этом случае невязка есть функция только s, принимающая значение порядка 1. Соотношение (11) показывает, что при $E\ll E_0$ (13) достаточно точно решает задачу, а для $E\leqslant E_0$ необходимо знать точную асимптотику. Определение поведения решения вблизи E_0 удобно делать непосредственно из уравнения (6).

Для рассматриваемого примера при $E\geqslant 0{,}2\,E_0\div 0{,}9\,E_0$ для $s=0{,}1\div 1{,}8$

$$q(E,\ s)=\left(\frac{E_{0}}{E}\right)^{s}\cdot\int\limits_{0}^{\frac{E}{E_{0}}}\frac{u^{s}}{1-u}\,du. \qquad (14)$$

Учет более точных сечений и дополнительных процессов взаимодействия электронов и фотонов с веществом усложняет вид $\varphi(E,\ E',\ \lambda,\ s)$, но принципиальных трудностей при этом не возникает. Необходимо отметить хорошую эффективность изложенного метода для сечений Бете — Гайтлера. Первое приближение полностью отражает качественное поведение решения: постоянство q при $E<0{,}8\,E_0$ (13), (14) и логарифмический рост при $E\to E_0$ (14) (см. рис. в [2, 3]). Первое приближение оказывается также пригодным в случае учета эффекта Ландау—

Померанчука [5]. Соотношение (11) можно использовать для оценки точности полученного решения и для построения итерационного процесса, сводящегося к точному решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахтадзе А. К., Гужавин В. В., Иваненко И. П. «Изв. АН СССР, сер. физ.», 1965, 29, 1714.
2. Васкин А. И., Гужавин В. В., Иваненко И. П. ЖЭТФ, 1966. 51, 1483.
3. Иваненко И. П. Электромагнитные каскадные процессы. Изд-во МГУ, 1972.
4. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965.
5. Guzhavin V. V., Ivanenko I. P., Kirillov A. A., Roganova T. M. «Proc. 14. Int. Conf. C. R.», 1975, 7, 2609.

Поступила в редакцию
20.1 1976 г.

Кафедра
НИИЯФ