Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1976

В. П. ГОНЧАРОВ, В. А. КРАСИЛЬНИКОВ, В. И. ПАВЛОВ

# ГАМИЛЬТОНОВСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД

Рассмотрены особенности распространения нелинейных волн в стратифицированных средах в рамках метода гамильтоновского формализма.

В настоящей работе рассмотрены особенности распространения волн конечной амплитуды в стратифицированных средах. Основное внимание здесь обращено на возможность определения канонических переменных для стратифицированных сред. Найдены преобразования, приводящие гамильтониан к диагональному виду [1]. Получены дисперсионные соотношения для различных ветвей допустимых в такой среде волновых движений. В качестве примера используемого метода рассмотрена возможность излучения низкочастотных (внутренних) волн мощным акустическим пакетом — эффект, аналогичный эффекту Черенкова.

Рассмотрим полную энергию, которую сохраняет система уравнений идеальной стратифицированной жидкости, находящейся в поле внешних потенциальных сил:

$$\mathcal{E}=\int d\mathbf{x}\rho\left\{\frac{v^2}{2}+\chi+u(\rho,\ \sigma)\right\}. \tag{1}$$

Здесь $\rho$ — плотность среды, $v$ — гидродинамическая скорость, $\chi$ — потенциал объемных сил, $u$ — внутренняя энергия жидкости, $\sigma$ — энтропия. Поскольку система исходных уравнений сохраняет также величину $\int d\mathbf{x}\rho\Psi(\sigma)=\mathrm{const}$ (где $\Psi$ — произвольная функция энтропии $\sigma$), запишем гамильтониан в виде

$$\mathcal{H}=\int d\mathbf{x}\rho\left\{\frac{v^2}{2}+\chi+u(\rho,\ \sigma)+\Psi(\sigma)\right\}. \tag{2}$$

Можно показать, что преобразование

$$\mathbf{v}=\nabla-\frac{\pi}{\rho}\nabla\sigma \tag{3}$$

позволяет записать исходные гидродинамические уравнения в виде

$$\dot{\varphi}=-\delta\mathcal{H}/\delta\rho,\quad \dot{\lambda}=-\delta\mathcal{H}/\delta\sigma,$$

$$\dot{\rho} = \delta\mathcal{H}/\delta\varphi, \quad \dot{\sigma} = \delta\mathcal{H}/\delta\lambda, \tag{4}$$

причем последняя пара уравнений — это уравнения непрерывности и адиабатичности. Для выяснения явного вида калибровочной функции $\Psi(\sigma)$ рассмотрим термодинамическое равновесие. В случае, когда внутренняя энергия среды записывается в виде $u = u_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \exp\left(\frac{\gamma-1}{R}\sigma\right)$ и эта среда находится в изотермическом равновесии $T_{st} = (\partial u/\partial\sigma)_{st} = \mathrm{const}$ в поле тяжести $\chi = gz$, можно получить

$$\Psi(\sigma) = -c^2\left(\frac{\sigma}{R\gamma} + \frac{1}{\gamma-1}\right), \tag{5}$$

$$\rho_{st} = \rho_0 \exp(-z/H), \quad \sigma_{st} = Rz/H, \quad \varphi_{st} = \lambda_{st} = 0,$$

где $\gamma$, $R$ — постоянные газа, $H = \frac{c^2}{\gamma g}$ — высота однородной атмосферы, $c = (\gamma R T_{st})^{1/2}$ — адиабатическая скорость звука.

Считая, что параметры $\rho$, $\varphi$, $\sigma$, $\lambda$ мало отклоняются от своих равновесных значений, произведем разложение гамильтониана по степеням

$$\rho' = \rho_{st}^{-1/2}(\rho - \rho_{st}), \quad \varphi' = \rho_{st}^{1/2}\varphi, \quad \sigma' = \rho_{st}^{1/2}\frac{(\sigma - \sigma_{st})}{R}, \quad \lambda' = \rho_{st}^{-1/2} R\lambda. \tag{6}$$

Если ввести матричное обозначение

$$\psi_r^+ = (\varphi'^*, \lambda'^*, \rho'^* \sigma'^*), \tag{7}$$

то, совершая Фурье-преобразования $\psi_r = (2\pi)^{-3/2}\int d\mathbf{k}\psi_k e^{i\mathbf{kx}}$, выражение для квадратичной части гамильтониана можно привести к виду

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\psi_k^+ \hat{H}_0 \psi_k, \tag{8}$$

где

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{k}^2 + \frac{1}{4H^2} & -\frac{n}{H}\left(\frac{n}{2H} - i\mathbf{k}\right) & 0 & 0 \\ -\frac{n}{H}\left(\frac{n}{2H} + i\mathbf{k}\right) & \frac{1}{H^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & \frac{\gamma-1}{\gamma}c^2 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma-1}{\gamma}c^2 & \frac{\gamma-1}{\gamma}c^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1).$$

Уравнения Гамильтона в этом случае примут вид

$$\hat{A}\dot{\psi}_k = i\delta\mathcal{H}/\delta\psi_k^+, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{I} \\ -i\hat{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

а $\hat{I}$ — единичная двухрядная матрица.

Поскольку матрицы $\hat{A}$ и $\hat{H}_0$ эрмитовы, причем $\hat{H}_0$ — положительно определенная матрица, можно показать [2], что существует такое линейное преобразование $\psi_k=\widehat{\Lambda}c_k$, которое одновременно приводит матрицы $\widehat{A}$ и $\widehat{H}_0$ к диагональному виду

$$\widehat{\Lambda}^+\mathscr{H}_0\widehat{\Lambda}=|\omega_i|\delta_{ij},\quad \widehat{\Lambda}^+\widehat{A}\widehat{\Lambda}=\delta_{ij}\,\mathrm{sign}\,\omega_i, \tag{10}$$

где $\omega_i$ — вещественные характеристические числа, являющиеся собственными частотами рассматриваемой колебательной системы и определяющиеся характеристическим уравнением $\det(\mathscr{H}_0-\omega\widehat{A})=0$. Отсюда следует существование двух типов волн — акустических $\omega_k^+$ и внутренних гравитационных $\omega_k^-$, подчиняющихся дисперсионному соотношению.

$$\omega_k^{\pm}=\frac{c}{\sqrt{2}}\left\{k^2+\frac{1}{4H^2}\pm\left[\left(k^2+\frac{1}{4H^2}\right)^2-\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma H)^2}\left[k^2-(\mathbf{kn})^2\right]\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \tag{11}$$

Выпишем конечный результат задачи о нахождении искомого $\widehat{\Lambda}$-преобразования. Матрицу $\widehat{\Lambda}$ можно представить в следующем виде:

$$\widehat{\Lambda}=\begin{pmatrix}\widehat{m} & -\widehat{m}\\ \widehat{n} & \widehat{n}\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\widehat{m}=ic\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\omega_+^{-1/2}\left[\dfrac{d_+}{\sqrt{\gamma-1}}+d_-e^{i\Phi}\right] & \omega_-^{-1/2}\left[\dfrac{d_-}{\sqrt{\gamma-1}}-d_+e^{i\Phi}\right]\\ \omega_+^{-1/2}d_-e^{i\Phi} & -\omega_-^{-1/2}d_+e^{i\Phi}\end{pmatrix},$$

$$\widehat{n}=\frac{1}{c}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\omega_+^{1/2}d_+ & \omega_-^{1/2}d_-\\ \omega_+^{1/2}\left[d_-\dfrac{e^{i\Phi}}{\sqrt{\gamma-1}}-d_+\right] & -\omega_-^{1/2}\left[d_+\dfrac{e^{i\Phi}}{\sqrt{\gamma-1}}+d_-\right]\end{pmatrix},$$

$$d_{\pm}=\left(\pm\frac{c^2\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\left(k^2+\dfrac{1}{4H^2}\right)-\omega_{\pm}^2}{\omega_-^2-\omega_+^2}\right)^{1/2},\quad \Phi=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{H}\,\frac{\mathbf{kn}}{\dfrac{1}{4H^2}-k^2}.$$

Используя полученные выражения, можно показать, что $c_k^+$ имеет следующую структуру: $c_k^+=(a_k^*,\ b_k^*,\ a_{-k},\ b_{-k})$, что соответствует переходу к комплексным переменным $a_k$ и $b_k$ по правилу

$$\begin{pmatrix}\varphi_k'\\ \lambda_k'\end{pmatrix}=\widehat{m}\begin{pmatrix}a_k-a_{-k}^*\\ b_k-b_{-k}^*\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\rho_k'\\ \sigma_k'\end{pmatrix}=\widehat{n}\begin{pmatrix}a_k+a_{-k}^*\\ b_k+b_{-k}^*\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Для переменных $a_k$ и $b_k$ выражение (8) и уравнение (9) принимают вид

$$\mathscr{H}_0=\int d\mathbf{k}\,(\omega_k^+a_k^*a_k+\omega_k^-b_k^*b_k),$$

$$\dot{a}_k=-i\delta\mathscr{H}/\delta a_k^*,\quad \dot{b}_k=-i\delta\mathscr{H}/\delta b_k^*. \tag{14}$$

Переход к величинам $(a_k,\ a_k^*)$ и $(b_k,\ b_k^*)$ позволяет, воспользовавшись квантовомеханической аналогией, трактовать эти величины как операторы рождения и уничтожения элементарных возбуждений поля соответствующей ветви дисперсионной кривой. Гамильтониан взаимодействия можно рассматривать как возмущение, вызывающее переходы в системе акустических и внутренних волн. В качестве примера рассмотрим возможность излучения внутренних волн мощным акустическим пакетом. Рассматривая аксиально-симметричный волновой пакет и излучение как замкнутую систему, которая в силу этого обладает функцией Гамильтона, можно показать в предположении спектральной узости звукового пакета $\frac{\Delta k}{k} \ll 1$, что гамильтониан взаимодействия пакета и излучения в сопровождающей системе координат, связанной с центром пакета, имеет вид:

$$\mathscr{H}_{int} = \frac{E}{ck\rho_0^{1/2}} e^{\frac{ct}{2H}} \int d\varkappa F(\varkappa) \{V(\varkappa) b_\varkappa + V^*(-\varkappa) b^*_{-\varkappa}\} \exp[i(\varkappa\mathbf{n}) ct]. \quad (15)$$

Здесь $E$ — полная энергия пакета, $\rho_0 = \rho_{st}(z=0)$, $F(\varkappa)$ — формфактор, характеризующий распределение пакета, $V(\varkappa)$ — ядро, характеризующее в трехволновом приближении взаимодействие высокочастотных и низкочастотных волн. Это выражение позволяет вычислить вероятность переходов в единицу времени для квазичастиц [3] в предположении малости потерь на излучение. Вычислим интенсивность излучения $dI$ в элемент телесного угла $do = 2\pi \sin\theta d\theta$, воспользовавшись тем, что баланс между уходом и приходом квазичастиц в состояние $\varkappa$ выражается через вероятности соответствующих процессов:

$$\frac{dI}{do} = (2\pi)^{-3} \frac{E^2(t)}{\rho_0 c^2 k} \cdot e^{\frac{ct}{H}} \frac{c}{H} \int_0^\infty d\varkappa \frac{\varkappa^2 \omega^-(\varkappa) \mid V(\varkappa) F(\varkappa) \mid^2}{\left(\frac{c}{2H}\right)^2 + (\varkappa c \cos\theta - \omega_\varkappa^-)^2}. \quad (16)$$

Следует обратить внимание на то, что величина $2\frac{c}{H} \Big/ \left[\left(\frac{c}{2H}\right)^2 + (\varkappa\mathbf{n} c - \omega_\varkappa^-)^2\right]$ не аппроксимируется функцией $\delta(\varkappa\mathbf{n}c - \omega_\varkappa^-)$, поскольку $\omega_\varkappa^- \leqslant \frac{\sqrt{\gamma - 1}}{\gamma H} c$. Это означает, что в рассматриваемом случае разрешены несинхронные взаимодействия звуковых и гравитационных волн. Последнее обстоятельство можно объяснить, если иметь в виду, что в стратифицированных средах отсутствие однородности исключает инвариантность гамильтониана относительно преобразования параллельного переноса, и тем самым условие сохранения квазиимпульса при трехволновых взаимодействиях в таких средах не выполняется строго.

Изменение со временем полной интенсивности $I$ и энергии пакета $E$, в предположении о медленном изменении энергии пакета на излучение, имеет вид:

$$I = \frac{I_0 e^{z/H}}{[1 + \beta(e^{z/H} - 1)]^2}, \quad E = \frac{E_0}{1 + \beta(e^{z/H} - 1)}, \quad \left(z = ct < H \ln \frac{1}{\beta}\right). \quad (17)$$

Здесь $\beta = \frac{H}{c} \frac{I_0}{E_0} \ll 1$. Как показал численный расчет, коэффициент $\beta$ достаточно точно оценивается выражением $\beta \sim 10^{-4} \frac{\sigma_\parallel}{H} M^2$, где $M$ — число Маха, связанное с энергией пакета $E_0 = \rho_0 c^2 M^2 \sigma_\parallel \sigma_\perp^2$, а $\sigma_\parallel$, $\sigma_\perp$ — соответственно продольный и поперечный размеры пакета.

Сделаем численные оценки для случая, когда в качестве среды рассматривается хромосфера Солнца, в которой распространяются звуковые волны, генерируемые в конвективном подфотосферном слое. Учитывая условия на Солнце для численных оценок, примем: $\gamma=5/3$, $R=1{,}18\cdot10^8$ эрг$\cdot$г$^{-1}\cdot$град$^{-1}$, $g=2{,}7\cdot10^4$ см$\cdot$с$^{-2}$, $T=5\cdot10^3$ K, $\rho_0=10^{-8}$ г$\cdot$см$^{-3}$.

В этом случае $H\simeq2{,}2\cdot10^7$ см, $c\simeq10^6$ см$\cdot$с$^{-1}$ и для $M=10^{-3}$, $\frac{\sigma_\parallel}{H}=\frac{1}{12}$, $\frac{\sigma_\perp}{H}=\frac{1}{6}$ получим $\beta\simeq2\cdot10^{-11}$, $I_0\simeq8\cdot10^{10}$ эрг/с и, следовательно, при $z=15H$ интенсивность $I=3\cdot10^6 I_0=2{,}4\cdot10^{17}$ эрг/с.

В заключение отметим, что использование развиваемого метода позволяет не только получить количественные оценки эффекта, но и обратить внимание на особенности волновых взаимодействий в стратифицированных средах.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. «О канонических переменных для неоднородных сред». Тезисы докладов на VI Международном симпозиуме по нелинейной акустике. Изд-во МГУ, 1975.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974.



Поступила в редакцию
24.6 1976 г.



Кафедра
акустики