Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1976

УДК 518 : 517 : 9 : 53 : 550.34 : 550.834

В. Б. ГЛАСКО, Л. Г. ГУЩИНА

О ЕДИНСТВЕННОСТИ В ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГЕОФИЗИКИ

Поставлена задача определения плотностного разряда земной коры по дисперсии поверхностных сейсмических волн и доказывается единственность решения этой задачи.

В ряде работ [1—4] высказывается мысль о целесообразности использования данных различной геофизической природы при прогнозировании структуры земных недр по наблюдениям на дневной поверхности. Независимо от характера данных мы имеем здесь дело с обратными задачами геофизики, относящимися к классу некорректных. Для решения таких задач с помощью ЭВМ весьма эффективным оказывается метод регуляризации А. Н. Тихонова [5, 6]. Этот метод может служить как для проверки состоятельности принятой модели структуры в пределах погрешности входных данных [7], так и для ее прогнозирования. Однако в обоих случаях принципиальным является вопрос о единственности решения задачи в рамках принятой модели; при наличии единственности в каждой из задач, связанных с использованием данных различной природы, можно ставить вопрос о снятии практической эквивалентности моделей различных типов в рамках погрешности [8].

В настоящей работе рассматривается проблема единственности при определении регионального плотностного разреза по дисперсионной кривой основного тона волн Лява. Для слоистых структур с кусочно-постоянными характеристиками эта проблема в числе других решена в [9, 10]. Однако в последнее время в геофизике возрос интерес к так называемым «градиентным» средам. Соответственно этому, здесь проблема рассматривается для достаточно типичной модели среды с непрерывным по глубине изменением плотности в слое.

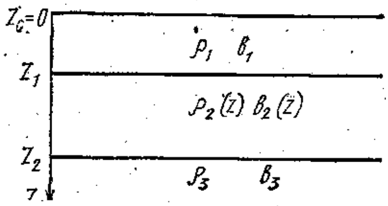
При этом мы исходим из того, что информация о значениях скорости волн сдвига (от которой также зависит дисперсионная кривая) может быть получена решением кинематической задачи сейсмики [11, 12]. Предполагается тем самым, что скоростной разрез $b(z)$ задан и принадлежит классу монотонно возрастающих с глубиной функций. В предположении монотонности в [12] устанавливается единственность решения кинематической задачи сейсмики.

В свою очередь однозначное решение задачи об определении плотностного разреза дает одну из возможностей для снятия регионального фона [13, 14] при исследовании локальных структур (например, нефтяных месторождений) по наблюденной аномалии гравитационного поля.

В настоящей работе устанавливается единственность решения рассматриваемой задачи для определенного класса «градиентных» структур.

Постановка обратной задачи

Рассмотрим структуру, состоящую из двух плоскопараллельных слоев на упругом полупространстве (см. рис.), определяемую следующими параметрами: $\rho_1=\mathrm{const}$ — плотность первого слоя, $b_1=\mathrm{const}$ — скорость волн сдвига в этом слое, $\rho_2=\rho_2(z)$, $b_2=b_2(z)$ — соответствующие параметры во втором («градиентном») слое; $\rho_3=\mathrm{const}$, $b_3=\mathrm{const}$ — параметры полупространства. Для такой структуры дисперсионная кривая основного тона $c_0(\omega)$ соответствует первому собственному значению $\lambda=\lambda^{(0)}(\omega)$ следующей краевой задачи [9, 15]:



$$
\begin{gathered}
u_1'' + \omega^2(\beta_1-\lambda)u_1 = 0 \quad 0<z<z_1,\\
u_1'|_{z=0} = 0,\\
u|_{z=z_1} = u_2|_{z=z_1},\ \mu_1 u_1'|_{z=z_1} = \mu_2(z_1)u_2'|_{z=z_1} \qquad (1)\\
\frac{1}{\mu_2(z)}(\mu_2(z)u_2')' + \omega^2(\beta_2(z)-\lambda)u_2 = 0,\ z_1<z<z_2,\\
(\mu_2(z)u_2' + \mu_3\omega\varkappa_3 u_2|_{z=z_2} = 0,
\end{gathered}
$$

при следующих соотношениях:

$$
\beta_i = \frac{1}{b_i^2},\ \lambda = \frac{1}{c^2}\quad \mu_2 = \rho_2 b_i^2,\ \varkappa_3 = \sqrt{\lambda(\omega)-\beta_3}
$$

Величина μ_1 — модуль сдвига в упругой среде.

Из условий задачи (1) видно, что спектр собственных значений зависит от отношения μ/μ_i $(i=2,3)$, а тем самым при известных скоростях от отношения плотностей ρ_i/ρ_1; он не изменится при изменении плотностей, сохраняющем это отношение. Значит, вопрос единственности обратного соответствия можно рассматривать, например, при фиксированном ρ_1.

Будем рассматривать класс структур $K_2(\rho)$ заданной выше геометрической конфигурации, параметры которых удовлетворяют следующим условиям: величины z_i, b_i, а также ρ_1 известны, причем $b_2(z)$ имеет n производных при произвольном, но фиксированном n;

$b_1 \leqslant \min\{\min\limits_{z\in[z_1z_2]} b_2(z),\ b_3\}$, $\rho_2(z)$ принадлежит классу многочленов степени n. Задача состоит в том, чтобы по заданному $\lambda^{(0)}(\omega)$ найти распределение плотности в нижележащих слоях, т. е. совокупность величин $\{\rho_2(z), \rho_3\}$.

Асимптотическое представление дисперсионной кривой

Исследование единственности аналогично [9, 10] будем проводить сопоставлением высокочастотных асимптотик дисперсионных кривых, отвечающих различным структурам.

Для получения асимптотик найдем прежде всего аддитивное представление [9] дисперсионного уравнения, отвечающего задаче (1) в области G:

$$\max\{\max_{z\in[z_1,z_2]}\beta_2(z),\ \beta_3\}<\lambda<\beta_1.$$

Примем в качестве фундаментальной системы решений в первом слое функции:

$$u_{11}(z)=\sin\omega\varkappa_1 z,$$

$$u_{12}(z)=\cos\omega\varkappa_1 z,$$

где $\varkappa_1=\sqrt{\beta_1-\lambda(\omega)}$ — действительна. Согласно [16] уравнение во втором слое имеет фундаментальное решение вида

$$u_{21}(z)=e^{-\omega g(z)}w_{21}(z),\quad u_{22}(z)=e^{\omega g(z)}w_{22}(z),$$

$$g(z)\equiv\int_{z_1}^{z}\varkappa_2(\xi)\,d\xi,$$

$\varkappa_2=\sqrt{\lambda(\omega)-\beta_2(\xi)}$ — действительна в G; функции $w_{2k}(z)$ ограничены при $\omega\to\infty$, а в силу введенных ограничений на параметры структуры — дифференцируемы достаточное число раз.

Заметим, что дисперсионное уравнение может быть записано в виде

$$u_1'|_{z=z_0}\equiv\varphi(\lambda,\ \omega)=0.$$

При этом u_1' получается решением задачи Коши от z_2 к $z_0=0$ при начальных условиях

$$u_2(z_3)=1,\ u_2'(z_3)=-\frac{\mu_3}{\mu_2(z_3)}\cdot\omega\varkappa_3.$$

Решая эту задачу с помощью введенной фундаментальной системы (очевидно, собственные значения не зависят от ее выбора), легко получить нижеследующее представление дисперсионного уравнения

$$\Lambda(\lambda,\ \omega)=\Lambda_1(\lambda,\omega)+e^{-2\omega g(\lambda)}R(\lambda,\ \omega)=0, \tag{2}$$

где

$$\Lambda_1(\lambda,\ \omega)=\frac{u_{12}}{u_{12}'}-\nu_1\frac{\widehat{u}_{21}}{\widehat{u}_{21}'}=\operatorname{ctg}\omega\varkappa_1 d_1-\nu_1\frac{\varkappa_1}{\widehat{\varkappa}_2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\widehat{w}_{21}'}{\omega\widehat{\varkappa}_2\,\widehat{w}_{21}}},$$

$$R(\lambda,\ \omega)=\nu_1\frac{\widehat{u}_{21}\,\widehat{u}_{22}'-\widehat{u}_{22}\,\widehat{u}_{21}'}{\widehat{u}_{21}'\left(\widehat{u}_{22}'-\widehat{u}_{21}'\,\dfrac{u_{22}+u_{22}'\cdot\nu_2/\omega\varkappa_3}{u_{21}+u_{21}'\cdot\nu_2/\omega\varkappa_3}\right)},$$

$$\nu_i=\frac{\mu_i}{\widehat{\mu}_{i+1}},\ i=1,\ 2,\ g(\lambda)=g(z_2),$$

u_{12}, μ_2, w_{21}... — значения соответствующих функций на нижней границе того слоя структуры, где они определены; $\widehat{u}_{21}$, $\widehat{\mu}_2$, $\widehat{w}_{21}$... — значения функций на верхней границе соответствующего слоя. Номер слоя структуры указан первым (или единственным) индексом.

Нетрудно заметить, что уравнение $\Lambda_1(\lambda, \omega)=0$ является дисперсионным для следующей вспомогательной задачи:

$$\begin{gathered} v''+\omega^2(\beta_1-\lambda)=0 \quad 0<z<z_1, \\ v'\big|_{z=0}=0, \quad v\big|_{z=z_1}=\widehat{u}_{21}, \quad \mu_1 v'\big|_{z=z_1}=\widehat{\mu}_2\,\widehat{u}'_{21}, \end{gathered} \tag{3}$$

сопоставимой с некоторой однослойной структурой. В свою очередь добавочный член в уравнении (2), определяющий влияние подстилающего полупространства, экспоненциально убывает при $\omega\to\infty$. Обратимся к построению из (2) аддитивно-асимптотических представлений [9], «дисперсионной» кривой.

При введенных ограничениях на параметры структуры функции $\rho(\lambda, \omega)\equiv\Lambda_1-\operatorname{ctg}\varkappa_1 d_1\omega$ и $R(\lambda, \omega)$ ограничены в области G, а также дифференцируемы по λ и ω достаточное число раз. Учитывая это, из уравнения (2) находим, что как решения (2): $\lambda_2^{(S)}(\omega)$ так и собственные значения (3): $\lambda_1^{(S)}(\omega)$ удовлетворяют асимптотическому равенству:

$$\lambda_j^{(S)}(\omega)=\beta_1-\frac{1}{\omega^2 d_1^2}\varphi_j^{(S)}(\omega),$$

где

$$\varphi_j^{(S)}\to\left[\left(S+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2 \text{ при } \omega\to\infty.$$

С другой стороны, для разности $\Delta_S\equiv\lambda_2^{(S)}(\omega)-\lambda_1^{(S)}(\omega)$ оказывается справедливой такая оценка:

$$\Delta_S=\frac{1}{\omega^2}e^{-|\omega g^*}\Psi_S(\omega),$$

$$g^*=\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{\beta_1-\beta_2(\xi)}\,d\xi,$$

$\Psi_S(\omega)$ — по крайней мере ограничена при $w\to\infty$.

В дальнейшем нас будет интересовать дисперсионная кривая основного тона; выделим в G подобласть

$$\widetilde{G}(\omega)=\beta_1-\frac{\varepsilon}{\omega^2}<\lambda<\beta_1,\ \omega>\omega_0$$

(при некотором ε и достаточно большом ω_0), содержащую единственную дисперсионную кривую (основной тон, $s=0$). Все последующие рассмотрения будем проводить в этой области.

В соответствии с оценками $\lambda_S^{(0)}(\omega)$, $s=1, 2$ — будем искать асимптотическое представление для $\lambda_S^{(0)}(\omega)$ в виде

$$\lambda_1^{(0)}(\omega)=\beta_1-\frac{\alpha_0^2}{\omega^2 d_1^2}\left\{1+\sum_{p=1}^{n}\frac{\xi_p}{\omega^p}+\frac{\varphi_{n+1}(\omega)}{\omega^{n+1}}\right\},\quad \alpha_0=\frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

Аддитивно-асимптотическое представление для $\lambda_2^{(0)}(\omega)$ ищем в виде

$$\lambda_2^{(0)}(\omega) = \lambda_1^{(0)}(\omega) + e^{-\omega g^*}\left\{\sum_{p=2}^{m} \frac{g_p}{\omega^p} + \frac{1}{\omega^{m+1}}\cdot\Psi_{m+1}(\omega)\right\}. \qquad (5)$$

Для определения неизвестных элементов этих представлений рассмотрим асимптотику функций $w_{2k}(z)$ при $\omega\to\infty$ и тех функционалов от w_{2k}, которые входят в левую часть дисперсионного уравнения (2). Согласно [16],

$$w_{2k}(z) = \{\mu_2(z)\varkappa_2(z)\}^{-1/2} S_k[g(z),\ \omega],\quad k=1,\ 2,$$

$$S_k[t,\ \omega] = 1 + \sum_{k=0}^{M} \frac{S_{n,k}(t)}{\omega^n} + \frac{1}{\omega^{M+1}}\chi_{M+1}(t,\ \omega), \qquad (6)$$

$$\chi_{M+1,k}(t,\ \omega) = 0(1);$$

$S_{n,k}(t)$ определяются рекуррентной системой уравнений:

$$\dot S_{n+1,k}(t) = \frac{1}{2}(-1)^k\left\{\ddot S_{n,k}(t) + \sum_{p=0}^{n}\chi_p(t)S_{n-p,k}(t)\right\}$$

с условиями $S_{n+1,k}(0)=0$, где $\chi_p(t)$ — коэффициент асимптотического разложения, аналогичного (6) для функции

$$\chi(t(\lambda)) = \chi[g(z,\ \lambda)] \equiv Q(z,\ \lambda) = \frac{1}{\varkappa_2^2}\left\{\frac{1}{4}\frac{\beta_2(\rho_2' b_2 + 2b_2'\rho_2)^2}{\rho_2^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\frac{\beta_2(\rho_2'' b_2^2 + 4\rho_2' b_2' b_2 + 2\rho_2(b_2'^2 + b_2 b_2''))}{\rho_2} + \frac{3}{4}\frac{\varkappa_2'^2}{\varkappa_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\varkappa_2''}{\varkappa_2}\right\}.$$

В дисперсионном уравнении (2) все эти величины берутся на границах второго слоя ($t=0$, $t=g(z_2)$) и асимптотически оцениваются вдоль дисперсионной краевой задачи (3) ($\lambda=\lambda_1^{(0)}(\omega)$). Искомые элементы асимптотических формул определяются прямой подстановкой (4), (5) в соответствующие уравнения; при этом для $\lambda_1^{(0)}(\omega)$ используется уравнение $\Lambda_1(\lambda,\ \omega)=0$, а для уклонения искомой кривой от $\lambda_1^{(0)}(\omega)$ вытекающее отсюда и из уравнения (2) выражение

$$\sum_{p=2}^{m}\frac{q_p}{\omega^p} + \frac{\Psi_{m+1}(\omega)}{\omega^{m+1}} = -\frac{R(\omega,\ \lambda)}{\Lambda_1'}\bigg|_{\lambda=\lambda_1} + \Psi(\omega,\ \lambda),$$

где

$$\Psi(\omega,\ \lambda) = 0\,(e^{-2\omega g(\lambda)}).$$

Оказывается справедливым следующее достаточное для дальнейшего анализа утверждение.

Теорема 1. В рассматриваемом классе структур верно аддитивно-асимптотическое ($\omega\to\infty$) представление (6), (7) дисперсионной кривой основного тона волны Лява при произвольном n и $m=3$, где

$$\varphi_{n+1}(\omega) = 0(1),\quad \Psi_4(\omega) = 0(1),$$

$$\xi_j = \xi_{j,1}(\rho_{j-2}) + \xi_{j,2}(\rho_{j-2})\,\widehat{\rho}_2^{(j-1)}, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\xi_1 = \xi_{1,1}(\rho_2) = -2\,\frac{\rho_1\widehat{\beta}_2}{\widehat{\rho}_2\beta_1 d_1\sqrt{\beta_1 - \widehat{\beta}_2}},$$

$$\rho_i = \{\widehat{\rho}_2,\ \widehat{\rho}_2',\ \ldots, \widehat{\rho}_2^{(i)}\}, \quad \xi_{j,2}(\rho_{j-2}) \neq 0,$$

$$q_2 = 0,\ q_3 = 2\alpha_0\xi_1\,\frac{1 - \nu_2\dfrac{\varkappa_2^*}{\varkappa_3^*}}{1 + \nu_2\dfrac{\varkappa_2^*}{\varkappa_3^*}},$$

где

$$\varkappa_2^* = \sqrt{\beta_1 - \beta_2(z_2)},\ \varkappa_3^* = \sqrt{\beta_1 - \beta_3},\ \nu_2 = \frac{\rho_2(z_2)\beta_3}{\beta_2(z_2)\rho_3}.$$

Заметим, что аналогичную структуру (с точностью до множителей, не зависящих от среды) имеют асимптотические представления любого обертона.

Единственность решения обратной задачи

Теорема 2. В рассматриваемом классе $K_2(\rho)$ структур (при известном ρ_1) дисперсионная кривая основного тона волны Лява однозначно определяет распределение плотности в нижележащих слоях.

Из теоремы 1 следует прежде всего, что если структуры из данного класса различаются хотя бы одним из параметров $\{\widehat{\rho}_2, \widehat{\rho}_2', \ldots, \widehat{\rho}_2^{(n)}\}$, то при достаточно больших ω соответствующие им дисперсионные кривые различаются. Действительно, при различных значениях $\widehat{\rho}_2$ у структур оказываются различными коэффициенты ξ_1, и, следовательно, дисперсионные кривые не могут совпадать при достаточно больших ω; если же значения $\widehat{\rho}_2$ одинаковы, но различны $\widehat{\rho}_2'$, то при достаточно больших ω дисперсионные кривые не совпадают из-за различия ξ_2, и т. д. Наконец, дисперсионные кривые заведомо различаются при достаточно больших ω, если порождающие их структуры имеют совпадающие значения $\widehat{\rho}_2, \widehat{\rho}_2' \ldots, \widehat{\rho}_2^{(n-1)}$, но различные $\widehat{\rho}_2^{(n)}$ (в этом случае различаются коэффициенты ξ_n при совпадении предыдущих). Следовательно, при различии хотя бы в одном из параметров $\{\widehat{\rho}_2, \widehat{\rho}_2', \ldots \widehat{\rho}_2^{(n)}\}$ дисперсионные кривые не могут совпадать тождественно. Таким образом, дисперсионные кривые однозначно определяют $\widehat{\rho}_2^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots n)$ при произвольном фиксированном n. Но так как n по предположению $\rho_2(z)$ принадлежит классу многочленов степени n, то совокупностью этих значений однозначно определяется функция $\rho_2(z)$.

С другой стороны, если у двух структур совпадают распределения $\rho_2(z)$ (прочие параметры второго слоя предполааются совпадающими по постановке задачи), то для таких структур одинаковы функции $\lambda_1^{(0)}(\omega)$ не зависящие от параметров подстилающего полупространства. А так как (это видно из выражения q_3, данном в теореме 1) значения ρ_3 однозначно определяются значениями q_3, то при различии у рассматриваемых структур ρ_3 дисперсионные кривые не могли бы совпадать по крайней мере при достаточно больших ω, т. е. совпадать тождественно. Тем самым теорема доказана.

Итак в рассматриваемом классе структур дисперсионные кривые основного тона волны Лява несут плотную информацию о распределении плотностей. Учитывая замечания, сделанные в конце предыдущего раздела относительно асимптотических представлений обертонов, можно утверждать, что последние не несут дополнительной информации о структуре. Напрашивается вывод о том, что совместная интерпретация дисперсионных данных различных гармоник не может привести к уточнениям решения обратной задачи. Это тем более заслуживает внимания, так как извлечь из наблюдений данные о дисперсии обертонов труднее, нежели данные, относящиеся к основному тону.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гамбурцев Г. А., Вейцман П. С. «Изв. АН СССР. Геофизика», 1956, № 9.
2. Белоусов В. В. «Вестник АН СССР», 1970, № 5, 72—75.
3. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1975, № 1.
4. Гласко В. Б., Гущин Г. В., Гущина Л. Г., Мудрецова Е. А. «Журн. вычисл. матем. и матем. физика», 1974, 14, № 5.
5. Тихонов А. Н. ДАН СССР, 1963, 153, № 1, 48—52.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1974.
7. Тихонов А. Н. В сб.: Некорректно поставленные задачи и методы их решения. Труды всесоюзной школы молодых ученых. Методы решения некорректных задач и их применение. Изд-во МГУ, 1974.
8. Гласко В. Б., Мартанус Г. М. и др. «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1974, № 5.
9. Гласко В. Б. «Журн. вычисл. матем. и матем. физика», 1970, 11, № 6, 1465—1480.
10. Гласко В. Б. ДАН СССР, 1971, 197, № 5, 1062—1065.
11. Саваренский Е. Ф., Кирнос Д. П. Элементы сейсмометрии. М., 1955.
12. Гервер М. Л., Маркушевич В. М. «Вычислительная сейсмология», 1967, вып. 3.
13. Литвиненко О. К. В сб.: Прикладная геофизика, 1966, № 25.
14. Гласко В. Б., Володин Б. Л., Мудрецов Е. А., Нефедова Н. Ю. «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1973, № 2, 30.
15. Зволинский Н. В. Дисперсия поверхностных волн Лява в двухслойной среде. Тр. ин-та геофизики Груз.ССР, т. 11. 1958.
16. Langer R. E. «Phys. Rev.», 1937, 51, 669.

Поступила в редакцию
10.6 1975 г.

Кафедра
математики