

УДК 62—501.224—501.7—508

Г. А. БЕНДРИКОВ, В. В. ВОЛКОВ

ОСОБЕННОСТИ ТРАЕКТОРИИ КОРНЕЙ ИДЕНТИЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрены корневые годографы многоконтурных систем с «чистым» запаздыванием, включенном в различные цепи и выяснена специфика корневых годографов в этих случаях.

Характеристическое уравнение двумерных систем с идентичными каналами удобно разложить на два сомножителя [1], имеющих для антисимметричных перекрестных связей комплексные коэффициенты. В [2] показано, что наличие комплексных коэффициентов приводит к

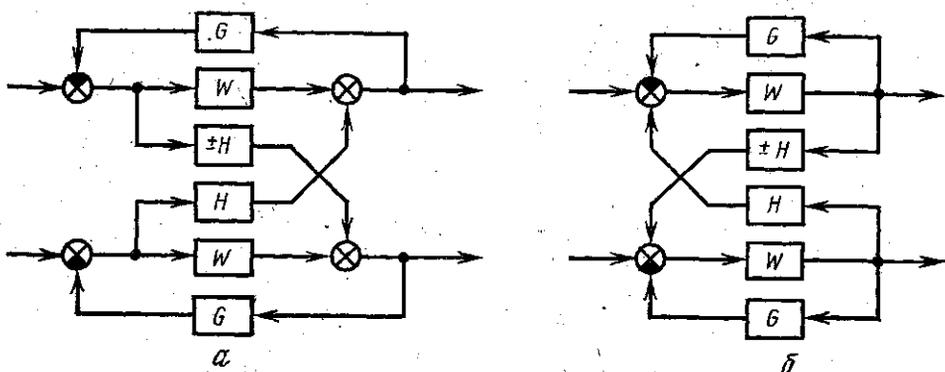


Рис. 1

повороту звезды асимптот относительно действительной оси либо к смещению центра асимптот в комплексную плоскость и, как следствие, к отсутствию в системе аериодических движений. С другой стороны, учет запаздывания дает бесконечное число корней характеристического уравнения. Ниже рассмотрим, к чему приводит сочетание особенностей уравнений с запаздыванием и уравнений с комплексными коэффициентами.

Структура двумерных систем с идентичными каналами показана на рис. 1. Здесь *а* — прямая перекрестная связь, *б* — обратная, знаки

плюс соответствуют симметричной связи, знаки минус — антисимметричной. Характеристическое уравнение в случае симметричной прямой и обратной перекрестной связи распадается на два сомножителя вида

$$1 + GW \pm GH = 0,$$

$$1 + GW \pm WH = 0$$

соответственно. В зависимости от месторасположения блока с запаздыванием, т. е. от того, в какую передаточную функцию W , G или H входит член $e^{-p\tau}$ и от выбора свободного параметра каждый из этих сомножителей сводится к одному из случаев, рассмотренных в [3]. Наличие двух сомножителей, корневые годографы которых являются зеркальным отражением один другого относительно действительной оси, удваивает кратность основных и кратных точек, общих для обоих сомножителей. Действительная ось принадлежит траекториям корней.

Для антисимметричной прямой и обратной связи характеристическое уравнение распадается на сомножители

$$1 + GW \pm jGH = 0,$$

(1)

$$1 + GW \pm jWH = 0.$$

Разнообразные случаи охватываются уравнением общего типа

$$\bar{\Phi}(p)e^{p\tau} + \bar{\Lambda}(p) + p[\bar{\Psi}(p)e^{p\tau} + \bar{\Theta}(p)] = 0, \quad (2)$$

где $\bar{\Phi}$, $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Psi}$, $\bar{\Theta}$ — полиномы с комплексными коэффициентами от $p = \delta + j\omega$; τ — время запаздывания, p — любой линейный параметр. Используя стандартные методы [4], можно получить основное фазовое уравнение, аналитическое уравнение траекторий корней и формулу параметра, аналогичные приведенным в [3]. Однако надо помнить, что структурой системы, как это видно из уравнений (1), определяются полиномы с действительными коэффициентами, являющиеся составными частями полиномов $\bar{\Phi}$, $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Psi}$, $\bar{\Theta}$, каждый из которых представим в виде $A(p) + j\hat{A}(p)$. Основные выражения, записанные через полиномы с действительными коэффициентами, для общего уравнения (2) имеют довольно громоздкий вид, но в каждом конкретном случае они значительно упрощаются. Так, если в уравнениях (1) за свободный параметр взят коэффициент усиления какого-либо блока, что обычно и требуется на практике, то исследуемое уравнение содержит всего лишь три слагаемых с действительными коэффициентами по сравнению с восемью в уравнении (2).

Остановимся на особенностях асимптотики траекторий корней уравнения (2). При $\delta \rightarrow -\infty$ корни стремятся к асимптотам годографа уравнения

$$\bar{\Lambda}(p) + p\bar{\Theta}(p) = 0,$$

а при $\delta \rightarrow \infty$ — к асимптотам, соответствующим уравнению

$$\bar{\Phi}(p) + p\bar{\Psi}(p) = 0.$$

Уравнения этого типа рассмотрены в [2]. Запишем эти уравнения через полиномы с действительными коэффициентами

$$A(p) + j\hat{A}(p) + p[B(p) + j\hat{B}(p)] = 0$$

степеней a, \hat{a}, b, \hat{b} соответственно. Количество и наклон асимптот зависит от соотношения этих степеней, причем для углов, образованных асимптотами с действительной осью, имеем

$$\alpha = \frac{N\pi + \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \left[\arctg \left| \frac{\hat{B}}{B} \right| - \arctg \left| \frac{\hat{A}}{A} \right| \right]}{\max(a, \hat{a}) - \max(b, \hat{b})}, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В нашем случае из этих углов для $\delta \rightarrow -\infty$ нужно выбрать удовлетворяющие условию $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$, а для $\delta \rightarrow \infty$ — $\pi/2 < \alpha < \pi/2$.

Если часть полиномов с действительными коэффициентами в (2) тождественно равна нулю, то это уравнение либо его предельные ($\delta \rightarrow \pm\infty$) случаи могут принимать разнообразные виды, охватываемые уравнением

$$[A(\rho) + j\hat{A}(\rho)]e^{j\omega\tau} + \rho[B(\rho) + j\hat{B}(\rho)] = 0.$$

Основное фазовое уравнение при этом имеет вид

$$|AB| \sin(\Sigma\alpha - \Sigma\beta + \omega\tau) + |\hat{A}\hat{B}| \sin\left(\Sigma\alpha - \Sigma\hat{\beta} + \omega\tau - \frac{\pi}{2}\right) + |\hat{A}B| \sin\left(\Sigma\hat{\alpha} + \Sigma\beta + \omega\tau + \frac{\pi}{2}\right) + |\hat{A}\hat{B}| \sin(\Sigma\hat{\alpha} - \Sigma\hat{\beta} + \omega\tau) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\alpha, \hat{\alpha}, \beta, \hat{\beta}$ — углы, образованные с действительной осью векторами, проведенными из точек расположения корней соответствующих полиномов в точку комплексной плоскости ρ . Учитывая, что при $\delta \rightarrow \pm\infty$ суммы углов стремятся к нулю, получим уравнение асимптот

$$\omega\tau = N\pi + \lim_{|\delta| \rightarrow \infty} \left[\arctg \left| \frac{\hat{B}}{B} \right| - \arctg \left| \frac{\hat{A}}{A} \right| \right]. \quad (4)$$

Это уравнение горизонтальных прямых, отстоящих друг от друга на π/τ и, вообще говоря, сдвинутых относительно действительной оси. В зависимости от соотношения степеней полиномов возможны три следующих основных случая.

1. $a > \hat{a}, b > \hat{b}$ или $a < \hat{a}, b < \hat{b}$. Горизонтальные асимптоты определяются уравнением $\omega\tau = N\pi$. Действительная ось сама является асимптотой.

2. $a > \hat{a}, b < \hat{b}$ или $a < \hat{a}, b > \hat{b}$. Асимптоты сдвинуты относительно действительной оси на $\pm\pi/2$.

3. $a = \hat{a}$ или $b = \hat{b}$. Имеет место дополнительный сдвиг асимптот на величину, равную арктангенсу отношения коэффициентов при старших членах полиномов, для которых выполняется равенство степеней. Выполнение обоих равенств приводит к общей формуле (4). Заметим, что хотя в случае 1 сдвига асимптот нет, действительная ось все равно не является траекторией. Это видно из основного фазового уравнения (3) или соответствующего аналитического уравнения траекторий корней. Сказанное относится и к общему уравнению (2). Таким образом, отсутствие апериодических движений вида $e^{\delta t}$ является общим для всех идентичных двухканальных систем с антисимметричными связями.

Рассмотрим две характерные картины траекторий корней при антисимметричной перекрестной связи. Пусть на рис. 1, a передаточные функции:

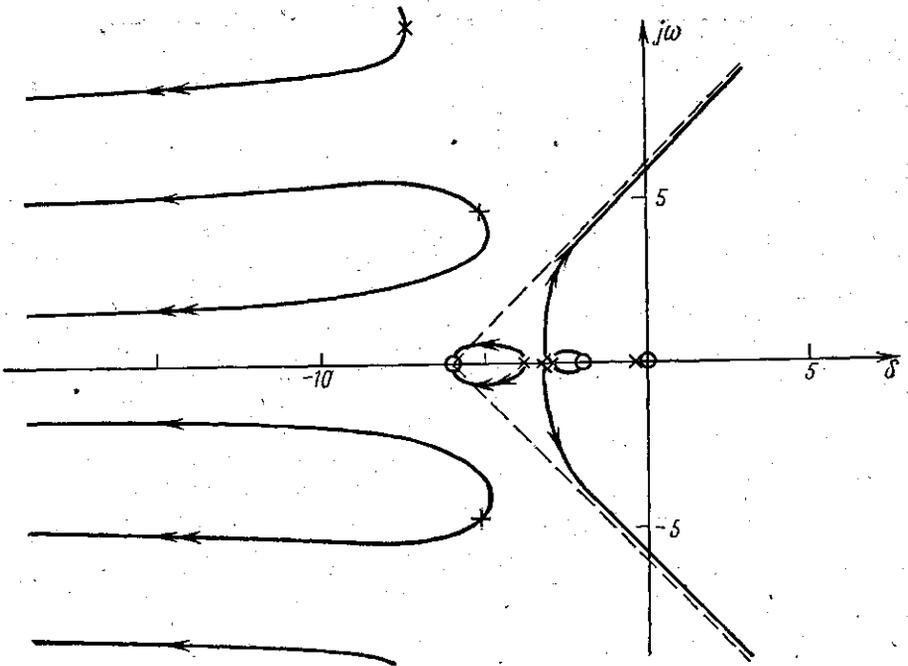


Рис. 2

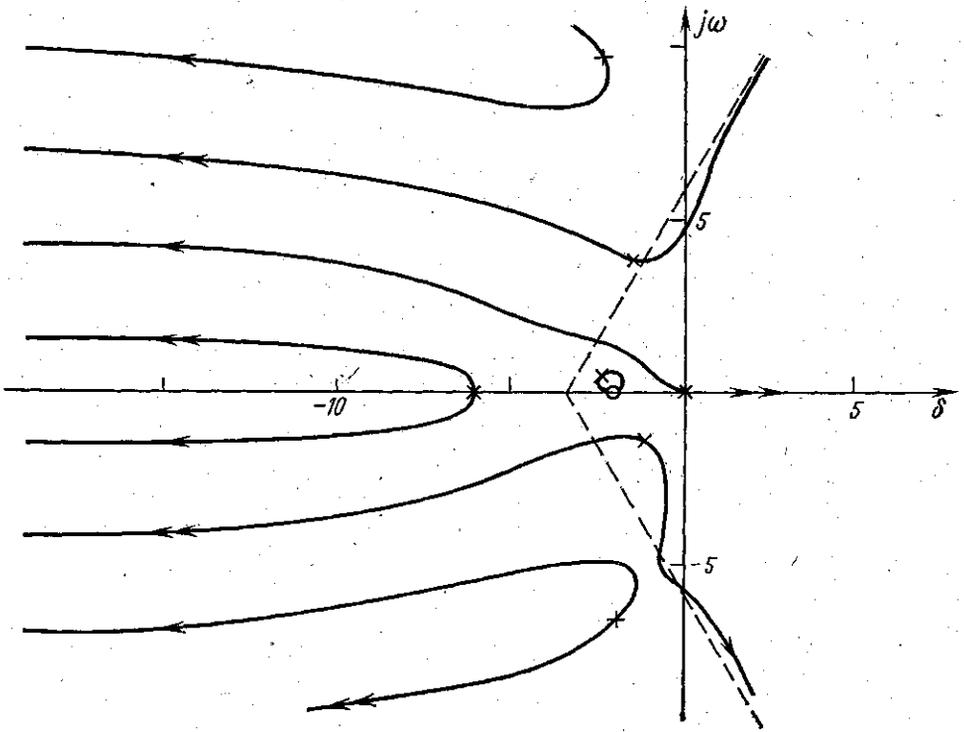


Рис. 3

$$W = \frac{K}{p(p+6)} e^{-p}, \quad H = \frac{\sigma(p+2)}{(p+3)^2}, \quad G = \frac{1}{p+8}.$$

Характеристические сомножители имеют вид

$$(p+3)^2 [p(p+6)(p+8)e^p + K] \pm j\rho p(p+2)(p+6)e^p = 0.$$

Здесь $\rho = \sigma$, K — параметр семейства. Траектории корней для знака плюс и $K=1$ даны на рис. 2. Асимптоты слева — горизонтальные прямые, смещенные на $\pi/2$, справа — четырехлучевая звезда, повернутая на $\pi/4$, из которой нужно взять только два правых луча. С ростом $|\rho|$ бесконечное количество корней двигается влево, их вклад в динамику системы уменьшается и можно считать, что все свойства системы определяются парой корней, уходящих к лучам полувезды вправо. Они пересекают мнимую ось при $\omega = 5,78$, $\rho = \pm 68,4$. Сомножитель со знаком минус дает точно такую же картину с заменой знака у ρ , так что в этом случае для всей системы имеет смысл рассматривать изменение только от 0 до ∞ .

Для той же схемы, но со свободным параметром — коэффициентом усиления в прямом канале и передаточных функциях

$$W = \frac{K}{p(p+6)}, \quad H = e^{-p}, \quad G = \frac{\alpha(p+2)}{(p+3)^2}$$

сомножитель со знаком плюс примет вид

$$p(p+6)[(p+3)^2 e^p + j\alpha(p+2)] + p(p+2)e^p = 0, \quad \rho = K \cdot \alpha, \quad \alpha = 1.$$

Траектории корней изображены на рис. 3. Справа опять полувезда асимптот, состоящая теперь из трех лучей, но добавочного поворота нет и сама правая полуось является асимптотой. Корневой годограф не симметричен, поэтому динамика системы различна для разных по знаку ρ . Для $\rho > 0$ все определяют две пары корней, пересекающих мнимую ось при $\omega_1 = 4,51$, $\rho_1 = 175$ и $\omega_2 = 5,77$, $\rho_2 = 315$. При $\rho < 0$ система сразу же теряет устойчивость почти аperiодически, так как хотя действительная ось и не является траекторией, но пара корней,двигающаяся к правой полуоси как к асимптоте, находится практически при нулевой частоте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский А. А. — «Автоматика и телемеханика», 1957, № 2.
2. Бендриков Г. А., Огородникова В. И., Сухачева Н. А. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. III, физ., астрон.», 1971, 12, № 6.
3. Бендриков Г. А., Волков В. В. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. III, физ., астрон.», 1974, 15, № 4.
4. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., 1964.

Поступила в редакцию
29.9.1975 г.

Кафедра
физики колебаний

18 мей