Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1976

УДК 530.12 : 531.51

В. И. ХЛЕБНИКОВ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИСТЕМ БЕЗ ВРАЩЕНИЯ (II)

Получена серия решений уравнений Эйнштейна—Максвелла с Λ-членом, описывающая гравитационное поле квазистационарных сосредоточенных систем, содержащих электрический и магнитный заряды. Найденные метрики принадлежат типу D, по Петрову, и обладают нулевым вращением и сдвигом. Приведена физическая интерпретация полученных решений. В настоящей, второй части работы содержится интегрирование полной системы уравнений Ньюмана—Пенроуза при сформулированных предположениях.

§ 8. Начальная система уравнений Ньюмана—Пенроуза

В предыдущей работе [1] были получены условия (A1—A12), которым должны удовлетворять тетрадные компоненты тензоров Вейля и Максвелла и спиновые коэффициенты, чтобы полная система уравнений Ньюмана—Пенроуза [2, 3] описывала гравитационное поле квазистационарных сосредоточенных систем без вращения типа D по Петрову:

$$\begin{gathered}\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \quad \Psi_2 \neq 0;\\ \Phi_0 = \Phi_2 = 0, \quad \Phi_1 = \Phi^0\rho^2;\\ \sigma = \varepsilon = \pi = k = \lambda = \tau = 0; \quad \rho = \bar{\rho};\\ l^\mu = \{0,\ 1,\ 0,\ 0\}.\end{gathered} \tag{1}$$

Введем обозначения

$$n^\mu = \{X^1,\ U,\ X^3,\ X^4\},\ m^\mu = \{\xi^1,\ \omega,\ \xi^3,\ \xi^4\}; \quad \Lambda = \frac{R}{24}$$

и выпишем начальную систему уравнений НП при условиях (1):

$$D\rho = \rho^2, \tag{2}$$

$$D\alpha = \rho\alpha, \tag{3}$$

$$D\beta = \rho\beta, \tag{4}$$

$$D\Phi_1 = 2\rho\Phi_1, \tag{5}$$

$$D\Psi_2 = 3\rho\Psi_2 + 2\rho\Phi_1\bar{\Phi}_1, \tag{6}$$

$$D\gamma = \Psi_2 + \Phi_1\bar{\Phi}_1 - \Lambda, \tag{7}$$
$$D\mu = \rho\mu + \Psi_2 + 2\Lambda, \tag{8}$$
$$D\nu = 0, \tag{9}$$
$$DU = -(\gamma + \bar{\gamma}), \tag{10}$$
$$DX^i = 0, \tag{11}$$
$$D\omega = \rho\omega - (\bar{\alpha} + \beta), \tag{12}$$
$$D\xi^i = \rho\xi^i; \tag{13}$$
$$\delta U - \Delta\omega = -\bar{\nu} - (\bar{\alpha} + \beta) U + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\,\omega, \tag{14}$$
$$\delta X^i - \Delta\xi^i = -(\bar{\alpha} + \beta) X^i + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\,\xi^i, \tag{15}$$
$$\bar{\delta}\omega - \delta\bar{\omega} = (\bar{\mu} - \mu) - (\bar{\beta} - \alpha)\,\omega - (\bar{\alpha} - \beta)\,\bar{\omega}, \tag{16}$$
$$\bar{\delta}\xi^i - \delta\bar{\xi}^i = -(\bar{\beta} - \alpha)\,\xi^i - (\bar{\alpha} - \beta)\,\bar{\xi}^i; \tag{17}$$
$$\bar{\delta}\Phi_1 = 0, \tag{18}$$
$$\delta\Phi_1 = 0, \tag{19}$$
$$\Delta\Phi_1 + 2\mu\Phi_1 = 0, \tag{20}$$
$$\delta\Psi_2 = 0, \tag{21}$$
$$\bar{\delta}\Psi_2 = 0, \tag{22}$$
$$3\nu\Psi_2 = 2\nu\Phi_1\bar{\Phi}_1, \tag{23}$$
$$\Delta\Psi_2 + 3\mu\Psi_2 = -2\mu\Phi_1\bar{\Phi}_1; \tag{24}$$
$$\bar{\delta}\nu = -\nu\,(3\alpha + \bar{\beta}), \tag{25}$$
$$\delta\rho = \rho\,(\bar{\alpha} + \beta), \tag{26}$$
$$\delta\alpha - \bar{\delta}\beta = \mu\rho + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta - \Psi_2 + \Phi_1\bar{\Phi}_1 + \Lambda, \tag{27}$$
$$\bar{\delta}\mu = -\mu\,(\alpha + \bar{\beta}), \tag{28}$$
$$\delta\nu - \Delta\mu = \mu\,(\mu + \gamma + \bar{\gamma}) - \nu\,(\bar{\alpha} + 3\beta), \tag{29}$$
$$\delta\gamma - \Delta\beta = -\gamma\,(\bar{\alpha} + \beta) - \beta\,(\gamma - \bar{\gamma} - \mu), \tag{30}$$
$$\Delta\rho = \rho\,(\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\mu}) - \Psi_2 - 2\Lambda, \tag{31}$$
$$\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = \rho\nu + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\,\alpha + \bar{\beta}\gamma. \tag{32}$$

Кроме того, в нашем распоряжении имеется следующая свобода координатных

$$r' = r + R^0(x^1,\ x^3,\ x^4), \tag{33}$$
$$x^{a'} = x^{a'}(x^1,\ x^3,\ x^4) \tag{34}$$

и тетрадных преобразований

$$n^{\mu'} = n^{\mu},\quad l^{\mu'} = l^{\mu},\quad m^{\mu'} = e^{i\theta^0} m^{\mu},\quad \bar{m}^{\mu'} = e^{-i\theta^0}\bar{m}^{\mu}, \tag{35}$$
$$m^{\mu'} = m^{\mu},\quad \bar{m}^{\mu'} = \bar{m}^{\mu},\quad n^{\mu'} = A^0 n^{\mu},\quad l^{\mu'} = (A^0)^{-1} l^{\mu},\quad r' = A^0 r, \tag{36}$$

не нарушающая квазинормировки тетрады (см. [1]) и условий (1). Здесь и всюду в дальнейшем величины с индексом ноль не зависят от аффинного параметра $x^2=r$. Греческие (тензорные) индексы изменяются в пределах $\mu, \nu, \ldots = 1, 2, 3, 4$, а малые латинские индексы — $a, b, \ldots = 1, 3, 4$.

§ 9. Интегрирование радиальных уравнений

Прежде всего интегрированию подлежат радиальные уравнения Ньюмана—Пенроуза, содержащие оператор $D=\partial/\partial r$. Не вдаваясь в детали, выпишем общее решение системы (2)—(13), найденное при условии $\rho=\bar{\rho}$, которое после применения соответствующего координатного преобразования (33) приводится к виду:

$$\rho = -\frac{1}{r}, \tag{37}$$

$$\alpha = -\frac{1}{r}\alpha^0, \tag{38}$$

$$\beta = -\frac{1}{r}\beta^0, \tag{39}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{r^2}\Phi^0, \tag{40}$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{r^3}\psi^0 + \frac{2}{r^4}\Phi^0\bar{\Phi}^0, \tag{41}$$

$$\gamma = \gamma^0 + \frac{1}{2r^2}\psi^0 - \frac{1}{r^3}\Phi^0\bar{\Phi}^0 - \Lambda r, \tag{42}$$

$$\mu = -\frac{1}{r}\mu^0 + \frac{1}{r^2}\psi^0 - \frac{1}{r^3}\Phi^0\bar{\Phi}^0 + \Lambda r, \tag{43}$$

$$\nu = \nu^0, \tag{44}$$

$$U = U^0 - (\gamma^0 + \bar{\gamma}^0)r + \frac{1}{2r}(\psi^0 + \bar{\psi}^0) - \frac{1}{r^2}\Phi^0\bar{\Phi}^0 + \Lambda r^2, \tag{45}$$

$$X^i = X^{0i}, \tag{46}$$

$$\omega = -\frac{1}{r}\omega^0 + (\bar{\alpha}^0 + \beta^0), \tag{47}$$

$$\xi^i = -\frac{1}{r}\xi^{0i}, \tag{48}$$

где величины с индексом ноль появляются как постоянные интегрирования.

§ 10. Процедура разделения переменных и система трансверсальных уравнений

На следующем этапе производится подстановка полученных выражений (37)—(48) в неиспользованные ранее уравнения НП-системы (14)—(32). Приравнивая в получающихся соотношениях члены, стоящие справа и слева при одинаковых степенях $1/r$, после довольно длинных преобразований получаем ряд алгебраических следствий

$$\omega^0 = \nu^0 = \alpha^0 + \bar{\beta}^0 = 0;$$

$$\psi^0 = \bar{\psi}^0, \quad \mu^0 = \bar{\mu}^0 = -U^0 \tag{49}$$

и систему трансверсальных уравнений вида:

$$\xi^{0i}\,\psi^0_{,i} = 0, \tag{50}$$

$$X^{0i}\psi^0_{,i} = -3\psi^0(\gamma^0 + \bar{\gamma}^0), \tag{51}$$

$$\xi^{0i}\,\Phi^0_{,i} = 0, \tag{52}$$

$$\bar{\xi}^{0i}\,\Phi^0_{,i} = 0, \tag{53}$$

$$X^{0i}\,\Phi^0_{,i} = -2\Phi^0(\gamma^0 + \bar{\gamma}^0), \tag{54}$$

$$\bar{\xi}^{0i}\gamma^0_{,i} - X^{0i}\alpha^0_{,i} = \gamma^0(\alpha^0 - \bar{\beta}^0), \tag{55}$$

$$\xi^{0i}\gamma^0_{,i} - X^{0i}\beta^0_{,i} = 2\bar{\gamma}^0\beta^0, \tag{56}$$

$$\xi^{0i}\mu^0_{,i} = 0, \tag{57}$$

$$\xi^{0i}\alpha^0_{,i} - \bar{\xi}^{0i}\beta^0_{,i} = \mu^0 + 2\beta^0(\bar{\beta}^0 - \alpha^0), \tag{58}$$

$$\xi^{0i}X^{0j}_{,i} - X^{0i}\xi^{0j}_{,i} = 2\bar{\gamma}^0\xi^{0j}, \tag{59}$$

$$\bar{\xi}^{0i}\xi^{0j}_{,i} - \xi^{0i}\bar{\xi}^{0j}_{,i} = (\alpha^0 - \bar{\beta}^0)\,\xi^{0j} - (\bar{\alpha}^0 - \beta^0)\,\bar{\xi}^{0j}, \tag{60}$$

$$X^{0i}\mu^0_{,i} = -2\mu^0(\gamma^0 + \bar{\gamma}^0). \tag{61}$$

Оставшаяся часть задачи сводится к нахождению всех решений этой системы и определению координатной зависимости величин (45)—(48).

§ 11. Интегрирование трансверсальных уравнений

Прежде всего, произведя соответствующее преобразование (34), приведем в новой системе координат вектор X^{0i} к виду:

$$(X^{0i})' = \delta^i_1 = \{1,\ 0,\ 0\}, \tag{62}$$

который будет сохраняться при последующих координатных преобразованиях типа

$$x^{1'} = x^1 + f(x^3,\ x^4); \tag{63}$$

$$x^{3'} = x^{3'}(x^3,\ x^4); \tag{64}$$

$$x^{4'} = x^{4'}(x^3,\ x^4). \tag{65}$$

Заметив далее, что при тетрадных A^0- и θ^0-преобразованиях соответственно величины ψ^0 и γ^0 с учетом (62) преобразуются по законам $\psi^{0'} = (A^0)^3\,\psi^0$, $\gamma^{0'} = \gamma^0 - \frac{1}{2}\,\partial A^0/\partial x^1$ и $\psi^{0'} = \psi^0$, $\gamma^{0'} = \gamma^0 + \frac{1}{2}\,i\partial\theta^0/\partial x^1$, воспользуемся формулами (35), (36), (51), чтобы добиться

$$\psi^{0'} \equiv m = \mathrm{const}; \quad \gamma^{0'} = 0, \tag{66}$$

после чего оставшаяся свобода тетрадных A^0- и θ^0- преобразований сведется к

$$A^0 = \mathrm{const}, \tag{67}$$

$$\theta^0 = \theta^0(x^3,\ x^4). \tag{68}$$

При условиях (62), (66) уравнение (50) удовлетворяется тождественно, а уравнения (55), (56), (59) соответственно дают:

$$\partial\alpha^0/\partial x^1 = 0; \quad \partial\beta^0/\partial x^1 = 0; \quad \partial\xi^{0i}/\partial x^1 = 0.$$

Используя, наконец, координатное преобразование (64), (65), методом, впервые примененным в работе [4] и получившим дальнейшее развитие в [5, 6], приведем величины ξ^{03}, ξ^{04} к виду

$$\begin{cases} \xi^{03\prime} = p(x^3,\ x^4), & (69) \\ \xi^{04\prime} = ip(x^3,\ x^4), & (70) \end{cases}$$

где $p(x^3, x^4)$ — комплексная функция, которая после применения (35), (68) становится вещественной:

$$p = \bar{p}. \tag{71}$$

Заметим, что координатные преобразования

$$\zeta' = \zeta'(\zeta), \tag{72}$$

где $\zeta \equiv x^3 + ix^4$ и ζ' — произвольная аналитическая функция, не нарушают условий (69), (70), (71). Это обстоятельство будет существенно использовано в будущем.

Подстановка (69), (70), (71) в уравнение (60) при $j=3$, 4 дает

$$\bar{\nabla} p(x^3,\ x^4) = 2\alpha^0(x^3,\ x^4) = -2\bar{\beta}^0(x^3,\ x^4),$$

где $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x^3} + i\frac{\partial}{\partial x^4} = 2\partial/\partial\bar{\zeta}$ и далее из (58) получаем:

$$2\mu^0 = (\sqrt{2}p)^2\,\nabla\bar{\nabla}\,[\ln(\sqrt{2}\,p)]. \tag{73}$$

Поскольку в силу (57), (61) $\mu^0 = \mathrm{const}$, мы можем с помощью (67) добиться

$$\mu^{0\prime} = (A^0)^2\mu^0 = -U^{0\prime} = -(A^0)^2U^0 \equiv \varepsilon^0 = -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2},\ 0. \tag{74}$$

Заметим теперь, что (73) представляет собой уравнение для конформно-плоской двухмерной поверхности с постоянной кривизной $2\mu^0 = 2\varepsilon^0$ и метрикой $(\sqrt{2}p)^2\delta^{ij}$ $(i,\ j=3,\ 4)$. Любая такая поверхность методом работы [4] может быть посредством конформного преобразования (72) приведена к гиперболоиду вращения $(\varepsilon^0 = -1/2)$, единичной сфере $(\varepsilon^0 = +1/2)$ или плоскости $(\varepsilon^0 = 0)$, а для них известно, что

$$\sqrt{2}\,p(\zeta,\ \bar{\zeta}) = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^0\zeta\bar{\zeta}. \tag{75}$$

(см. также [7, 8]).

Величина ξ^{01} удовлетворяет уравнению (60) при $j = 1$:

$$\nabla\left(\frac{\bar{\xi}^{01}}{p}\right) - \bar{\nabla}\left(\frac{\xi^{01}}{p}\right) = 0. \tag{76}$$

Поскольку при координатном преобразовании (63) величина ξ^{01} преобразуется по закону

$$\xi^{01'} = \xi^{01} + p\nabla f(x^3, x^4),$$

а (76) является в то же время условием интегрируемости уравнения

$$\nabla f(x^3, x^4) = -\frac{\xi^{01}(x^3, x^4)}{p(x^3, x^4)},$$

то всегда можно выбрать функцию $f(x^3, x^4)$ так, чтобы величина $\xi^{01'}$ обратилась в ноль:

$$\xi^{01'} = 0. \tag{77}$$

Интегрирование уравнений (52) — (54) дает

$$\Phi^0 \equiv (e + ig)/\sqrt{2} = \text{const}. \tag{78}$$

Суммируя (62), (69), (70), (73) — (75), (77), (78), выпишем в компактном виде искомое общее решение системы (49) — (61):

$$\xi^1 = 0, \quad \xi^3 = -\frac{1}{r}p, \quad \xi^4 = -\frac{i}{r}p; \quad \omega = 0;$$

$$X^i = \delta^i_1; \quad U = -\varepsilon^0 + \frac{m}{r} - \frac{e^2 + g^2}{2r^2} + \Lambda r^2; \tag{79}$$

$$\sqrt{2}p = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^0\zeta\bar{\zeta},$$

где $\varepsilon^0 = +1/2, -1/2, 0$ и m, e, g — вещественные постоянные.

§ 12. Серия Рейсснера — Нордстрема с магнитным зарядом и Λ-членом в канонической форме

а) случай $\varepsilon^0 = +1/2$. Общее решение (79) координатным преобразованием

$$u \equiv x^{1'} = x^1,$$

$$r \equiv x^{2'} = x^2,$$

$$\theta \equiv x^{3'} = \arcsin\left[(\zeta\bar{\zeta})^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}\zeta\bar{\zeta}\right)^{-1}\right],$$

$$\varphi \equiv x^{4'} = \operatorname{arctg}(x^4/x^3)$$

приводится к виду

$$\xi^{1'} = 0,$$

$$\xi^{3'} = -\frac{\zeta}{\sqrt{2}r\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}},$$

$$\xi^{4'} = -\frac{i\left(1 + \frac{1}{4}\zeta\bar{\zeta}\right)}{\sqrt{2}r(\zeta\bar{\zeta})}\zeta,$$

$$\omega' = 0; \quad (X^i)' = \delta^i_1 = \{1, 0, 0\};$$

$$U' = -\frac{1}{2} + \frac{m}{r} - \frac{e^2 + g^2}{2r^2} + \Lambda r^2$$

или в компонентах ковариантной метрической формы:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2 + g^2}{r^2} - 2\Lambda r^2\right) du^2 + 2dudr -$$
$$- r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \qquad (80)$$

б) случай $\overset{0}{\varepsilon} = -1/2$. В этом случае координатным преобразованием

$$u \equiv x^{1'} = x^1,$$
$$r \equiv x^{2'} = x^2,$$
$$\theta \equiv x^{3'} = \operatorname{arcsh}\left[(\zeta\bar{\zeta})^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{4}\zeta\bar{\zeta}\right)^{-1}\right],$$
$$\varphi \equiv x^{4'} = \operatorname{arctg}(x^4/x^3)$$

решение приводится к виду:

$$\xi^{1'} = 0,$$
$$\xi^{3'} = -\frac{\zeta}{\sqrt{2}\, r\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}},$$
$$\xi^{4'} = -i\zeta\left(1 - \frac{1}{4}\zeta\bar{\zeta}\right)/(\sqrt{2}\, r\zeta\bar{\zeta}),$$
$$\omega' = 0; \quad (X^i)' = \delta^i_1 = \{1,\ 0,\ 0\};$$
$$U' = \frac{1}{2} + \frac{m}{r} - \frac{e^2 + g^2}{2r^2} + \Lambda r^2;$$
$$ds^2 = \left(-1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2 + g^2}{r^2} - 2\Lambda r^2\right) du^2 + 2dudr -$$
$$- r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sh}^2 \theta d\varphi^2). \qquad (81)$$

в) случай $\overset{0}{\varepsilon} = 0$. Преобразование координат:

$$u \equiv x^{1'} = x^1,$$
$$r \equiv x^{2'} = x^2,$$
$$\theta \equiv x^{3'} = (\zeta\bar{\zeta})^{\frac{1}{2}},$$
$$\varphi \equiv x^{4'} = \operatorname{arctg}(x^4/x^3).$$

Тетрадные компоненты метрики:

$$\xi^{1'} = 0,$$
$$\xi^{3'} = -\frac{\zeta}{\sqrt{2}\, r\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}},$$
$$\xi^{4'} = \frac{-i\zeta}{\sqrt{2}\, r\,(\zeta\bar{\zeta})},$$
$$\omega' = 0; \quad (X^i)' = \delta^i_1 = \{1,\ 0,\ 0\};$$
$$U' = \frac{m}{r} - \frac{e^2 + g^2}{2r^2} + \Lambda r^2.$$

Метрика:

$$ds^2 = \left(-\frac{2m}{r} + \frac{e^2+g^2}{r^2} - 2\Lambda r^2\right) du^2 + 2dudr - \\ - r^2(d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2). \tag{82}$$

Наконец, при переходе от изотропных координат к обычным «шварцшильдоподобным»

$$u \to t \equiv u - \int \frac{dr}{2U(r)}$$

метрики (80)—(82) примут стандартный вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2+g^2}{r^2} - 2\Lambda r^2\right) dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \\ - dr^2 / \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2+g^2}{r^2} - 2\Lambda r^2\right). \tag{83}$$

$$ds^2 = \left(-1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2+g^2}{r^2} - 2\Lambda r^2\right) dt^2 - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2) - \\ - dr^2 / \left(-1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2+g^2}{r^2} - 2\Lambda r^2\right). \tag{84}$$

$$ds^2 = \left(-\frac{2m}{r} + \frac{e^2+g^2}{r^2} - 2\Lambda r^2\right) dt^2 - r^2(d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2) - \\ - dr^2 / \left(-\frac{2m}{r} + \frac{e^2+g^2}{r^2} - 2\Lambda r^2\right). \tag{85}$$

Приведем физическую интерпретацию полученных решений. Прежде всего, из постановки основной задачи [1] вытекает, что найденная нами группа решений (83)—(85) описывает гравитационное поле квазистационарных сосредоточенных систем типа D без вращения, содержащих электрический e и магнитный g заряды. При этом метрика (83) представляет собой обобщение метрики Рейсснера—Нордстрема с магнитным зарядом (см., например, [9, 10]) на случай теории с космологическим членом, а вся серия (83)—(85) обобщает серию А-метрик Элерса и Кундта [11]. Для того чтобы выяснить физический смысл этих решений, совершим в них предельные переходы типа e, g, $\Lambda \to 0$, соответствующие «выключению» электромагнитного поля и переходу к уравнениям Эйнштейна без Λ — члена. Тогда (83), (84) и (85) соответственно перейдут в метрики А1, А2 и А3 работы [11], которые интересны тем, что вектор Киллинга $k^\mu = \delta^\mu_1$ для первой из них является времениподобным, для второй — пространственноподобным и для третьей — светоподобным (изотропным) вектором. В работе [12] А2-метрика Элерса и Кундта интерпретируется как гравитационное поле тахиона. Аналогично, мы можем сказать, что А3-метрика (а, следовательно, и метрика (85)) описывает гравитационное поле изотропного стационарного точечного источника, движущегося со световой (люксон) скоростью.

Заметим, что мы не обсуждаем здесь вопросов о какой бы то ни было «реальности» тахионных решений, хорошо сознавая, однако, что такие решения без дополнительных ограничений, связанных с причинностью, не могут быть отброшены. Весьма обширная литература по проблеме тахионов в общей теории относительности представлена в работе Готта [12] (см. также обзор [13]).

Отметим, наконец, еще один любопытный факт. Легко проверить, что при помощи комплексной замены переменных $(t, r, \theta)\to(it, ir, i\theta)$ и параметра $m\to-im$ «тахионное» решение А2 переходит в «тардионную» метрику Шварцшильда А1, причем эта замена, очевидно, неоднозначна. Возможность указанного перехода обусловлена, в конечном счете, тем обстоятельством, что уравнения Эйнштейна (Эйнштейна—Максвелла) допускают комплексификацию, и выбор действительных сечений комплексных многообразий, вообще говоря, неоднозначен и должен быть заранее оговорен. Переходя от одного действительного сечения к другому посредством некоторого комплексного преобразования координат, мы можем получать новые решения уравнений Эйнштейна—Максвелла из уже известных старых. Именно таким способом, например, известное решение Демьянского—Ньюмана было получено из метрики Шварцшильда [14]. Процедура получения решений уравнений Эйнштейна—Максвелла методом комплексного преобразования координат получила строгое обоснование в работе [15].

Что касается А3-метрики (или метрики (85)), то мы заметим лишь, что существует сингулярное преобразование координат, переводящее в эту метрику метрики А1 и А2 (см. подробнее [11]). Отметим также, что сигнатура координат t, r в интервалах $(-\infty, -2m)$, $(-2m, 0)$, $(0, 2m)$ и $(2m, +\infty)$ зависит от выбора знака константы интегрирования m (либо знака r). Так, при обычном выборе знаков $m>0$, $r>0$ вне шварцшильдовской псевдосингулярной сферы для решения А1 r — пространственная координата, t — временная, внутри же сферы Шварцшильда все наоборот. Аналогичный сигнатурный анализ можно произвести и для остальных решений. При таком анализе все пространство — время разобьется на счетное число областей, на границах которых будет скачком меняться сигнатура пространственных и временных координат. Для метрики А1 число таких областей равно 4. Мы не будем здесь, однако, останавливаться на дальнейших деталях теории аналитического продолжения, а интересующихся этими вопросами отсылаем к работам [16].

Настоящая работа является непосредственным продолжением и развитием дипломной работы автора [17], выполненной под руководством академика М. А. Маркова и кандидата физико-математических наук В. П. Фролова. Дальнейшие (более общие) результаты получены в [18, 19]. Отметим, наконец, что общее частицеподобное решение уравнений Эйнштейна — Максвелла типа Д другим методом получено в [20] и содержит 7 произвольных параметров:

$$m+in,\ a+ib,\ e+ig,\ \Lambda$$

(m — масса, n — НУТовский параметр, a — вращение, b — ускорение, e и g — электрический и магнитный заряды, Λ — космологический член).

Автор признателен всем участникам семинаров «Гравитация» и «Теоретическая физика», принимавшим участие в обсуждении результатов настоящей работы.

И в заключение автор благодарит Я. Б. Зельдовича за поддержку и рецензента за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хлебников В. И. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. III, физ., астрон.» 1976, 17, № 5.
2. Newman E., Penrose R. «J. Math. Phys.», 1962, 3, 566.
3. Newman E., Penrose R. «J. Math. Phys.», 1963, 4, 998.

4. Newman E., Tamburino L., Unti T. «J. Math. Phys.», 1963, 4, 915.
5. Talbot C. «Commun. Math. Phys.», 1969, **13**, 45.
6. Lind R. «General Rel. Grav.», 1974, **5**, 25.
7. Рашевский П. Р. Риманова геометрия и тензорный анализ, гл. 9. М., 1967.
8. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных, ч. 2, гл. 5. М., 1972.
9. Семенов В. П. «Изв. вузов. Физика», 1974, № 12, 146.
10. Семенов В. П. «Изв. вузов. Физика», 1975, № 2, 11.
11. Ehlers J., Kundt W. An Introduction to Current Research. Ed. L. Witten. N. Y., 1962, p. 49—101.
12. Gott J. «Nuovo Cimento», 1974, **22 B**, 49.
13. Recami E., Mignani R. «Riv. Nuovo Cimento», 1974, 4, 209.
14. Demianski M., Newman E. «Bul. Acad. Pol. Sci.», 1966, **14**, 653.
15. Newman E. T. «J. Math. Phys.», 1973, **14**, 774.
16. Finkelstein D. «Phys. Rev.», 1958, **110**, 965; Kruskal M. D. 1960, **119**, 1743; Graves J. C., Brill D. R. 1960, **120**, 1507; Carter B. «Phys. Rev. Lett», 1966, **21**, 423; Boyer R. H., Lindquist R. W. «J. Math. Phys.», 1967, 8, 265; Walker M. 1970, **11**, 2280.
17. Frolov V. P., Khlebnikov V. I. «Gravitational Field of Radiating Systems. 1. Twisting free type D metrics». Academy of Sciences of the USSR, P. N. Lebedev. Physical Institute, Preprint N 27, Moscow, 1975; Фролов В. П., Хлебников В. И. В сб.: «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», вып. 8, под ред. К. П. Станюковича. М., 1976 и в сб.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». Минск, 1976, с. 94—95.
18. Хлебников В. И. «Изв. вузов. Физика», 1976, № 3, 113—117 и 118—123.
19. Хлебников В. И. «Изв. вузов. Физика», 1976, № 7, 140—142; в сб.: Тезисы докладов ГР—4... с. 216—218; в сб.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1976.
20. Plebanski J. F., Demianski M. Rotatinu charcged and uniformly accelerating mas sin general Relativity. Preprint OAP—401, April, 1975.

Поступила в редакцию
7.10 1975 г.

Кафедра
теоретической физики

15 ...