

А. В. ИВАНОВ, И. И. МИНАКОВА

## УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ НЕАВТОНОМНОГО ДВУХКОНТУРНОГО ГЕНЕРАТОРА

Теоретически и экспериментально исследуются трехчастотные и двухчастотные режимы, возникающие в двухконтурном автогенераторе при действии внешней силы в определенном диапазоне расстройек. Получены амплитудные и частотные характеристики для различных режимов. Определены границы областей устойчивости. Исследованная система может служить многозначным частотным элементом с управляемыми состояниями.

Исследованию режимом многочастотной генерации посвящено много работ, особенно в последнее время. Это связано с появлением и расширением областей применения генераторов, в которых эти режимы играют существенную роль: ОКГ [1], СВЧ-генераторов с сосредоточенным и распределенным усилением [2], генераторов с большим запаздыванием в обратной связи [3], связанных генераторов [4] и т. д. В большей части этих работ изучались автономные режимы многочастотной генерации. Влияние внешней силы рассматривалось в ряде работ наравне с влиянием начальных условий — с точки зрения перевода системы из одночастотного режима в многочастотный и наоборот.

В данной работе подробно исследуется один из случаев многочастотной генерации, в котором внешняя сила принципиально необходима, т. е. рассматривается вопрос о создании сложных спектров и управлении ими с помощью внешней силы. Подобные задачи рассматривались ранее в [5, 6] и отчасти в [7].

В качестве объекта исследования взят двухконтурный автогенератор с сильной связью между контурами. Предполагается, что система добротна и имеет мягкий предельный цикл [8] для внешней силы, дающей полосу синхронизации порядка  $\omega_{20} - \omega_{10}$ , где  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$  — частоты автоколебаний системы. В такой системе при кубической характеристике активного элемента невозможна одновременная автономная генерация колебаний с частотой  $\omega_{10}$  и  $\omega_{20}$ .

На систему подается нерезонансная внешняя сила с частотой  $p$  и амплитудой  $E$ . Если частоты  $p$ ,  $\omega_{10}$  и  $\omega_{20}$  не связаны никакими комбинационными соотношениями, т. е. если внешняя сила оказывает на автоколебания только гасящее воздействие, то трехчастотный режим  $\omega_1 \simeq \omega_{10}$ ,  $\omega_2 \simeq \omega_{20}$ ,  $p$  невозможен. Если же эти частоты связаны каким-либо соотношением (в зависимости от вида нелинейности системы), то

на колебаниях с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  появится подкачка энергии от источника внешней силы: характер взаимодействия между колебаниями изменится, и в результате может быть получен трехчастотный режим. При характеристике активного элемента  $i = -S_0 y_1 + \frac{1}{3} S_2 y_1^3$ , где  $y_1$  — напряжение на активном элементе, такими комбинационными соотношениями будут  $2p = \omega_1 + \omega_2$  или  $2\omega_2 = p + \omega_1$ . Первый случай кратко рассмотрен в [5], второй исследуется в данной работе.

Уравнения движения двухконтурного генератора имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1(\delta^{(1)} - \delta_0 + \delta_2 y_1^2) + \nu_1^2 y_1 + k_1 \ddot{y}_2 &= E_1 \sin pt, \\ \ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 \delta^{(2)} + \nu_2^2 y_2 + k_2 \ddot{y}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Движение в системе будет суммой движений трех частот:  $p$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Остальными составляющими для добротной системы с мягким предельным циклом можно пренебречь. Из системы (1) для колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  можно записать

$$\ddot{x}_i + 2\dot{x}_i(\beta_i - \delta_0) + \omega_{i0}^2 x_i + F_i(x_i, x_j, x_p) = 0, \quad (2)$$

где  $x_i$  — координата движения с частотой  $\omega_i$ ,  $\beta_i$  — затухание на нормальной частоте  $\omega_{i0}$ ,  $F_i$  — составляющая с частотой  $\omega_i$  из члена

$$2\dot{y}_1 \delta_2 y_1^2 = 2(x_1 + x_2 + x_p) \delta_2 (x_1 + x_2 + x_p)^2.$$

Вообще говоря, параметры  $\beta_i$  и  $\omega_{i0}$  в (2) должны быть частотно-зависимыми, но для добротной системы с сильной связью при небольших отклонениях  $\omega_i$  от  $\omega_{i0}$  эту зависимость можно не учитывать.

Пренебрегая нерезонансными комбинационными составляющими, мы тем самым пренебрегаем и обратным влиянием колебаний на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  на колебания на частоте  $p$ . Кроме того, предположения о высокой добротности и сильной связи означает, что  $p - \omega_{20} \approx \omega_{20} - \omega_{10} \ll \beta_i$ . Тогда для колебаний с частотой  $p$  в соответствии с обыкновенным резонансным законом получим

$$A_p \approx \frac{\omega_{20}^2 E}{p^2 - \omega_{20}^2} \quad \cos \varphi_p \approx -1,$$

где  $A_p$  и  $\varphi_p$  — амплитуда и фаза колебаний.

Решение (2) ищется в виде  $x_i = A_i(t) \sin[\omega_i t + \varphi_i(t)]$ . Укороченные уравнения для медленно меняющихся  $A_i$  и  $\varphi_i$  имеют вид

$$A_i = \frac{\delta_2}{4} A_i (A_{i0}^2 - A_i^2 - 2A_j^2 - 2A_p^2) - \frac{\delta_2}{4} 2^{i-1} A_2 A_j A_p \cos \psi, \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}_i = -\Delta \omega_i + \frac{\delta_2}{4} (-2)^{i-1} A_2 A_p \frac{A_j}{A_i} \sin \psi, \quad (4)$$

$$\Delta p = 2\Delta \omega_2 - \Delta \omega_1, \quad (5)$$

где  $i = 1, 2$   $j = 2, 1$ ;  $A_{i0}^2 = 4 \frac{\delta_0 - \beta_i}{\delta_2}$  — квадрат амплитуды автономных колебаний на частоте  $\omega_{i0}$ ;  $\Delta \omega_i = \omega_i - \omega_{i0}$ ;  $\Delta p = p - p_0$ ,  $p_0 = 2\omega_{20} - \omega_{10}$ ,  $\psi = \varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_p$ .

Так как мы пренебрегли обратным влиянием, то  $\varphi_p = \text{const}$ ,  $\psi = \varphi_1 - 2\varphi_2$ , и уравнения (4) для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  можно объединить:

$$\dot{\psi} = \Delta p + \frac{\delta_2}{4} \frac{A_p}{A_1} (4A_1^2 + A_2^2) \sin \psi. \quad (6)$$

Кроме того, из уравнений (4) и (5) в стационарном режиме:

$$\Delta\omega_1 = -\frac{\Delta p}{1 + 4A_1^2/A_2^2}, \quad \Delta\omega_2 = \frac{\Delta p}{2(1 + A_2^2/4A_1^2)}. \quad (7)$$

Условия устойчивости, используя [9], можно записать в виде  $\Delta_k (-1)^k > 0$ , где  $\Delta_k$  — определители главных миноров  $k$ -того порядка матрицы  $\|\delta l_m\|$ . Элементы матрицы имеют вид

$$b_{im} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q_l}{\partial q_m} + \frac{\partial Q_m}{\partial q_l} \right),$$

где  $q_m = Q_m(q_l)$  — система укороченных уравнений (3) и (6),  $s, m = 1, 2, 3$ . Эти условия являются достаточными (г) для решений системы (3), (4) и (5).

Для получения таких условий требуется, чтобы все  $q_m$  имели одинаковую размерность. Это легко сделать, например, умножив уравнение (6) на  $A_p = \text{const}$  и считая при получении условий устойчивости неизвестной функцией не  $\psi$ , а  $A_p \psi$ .

Тогда получается такая матрица:

$$\left\| \begin{array}{ccc} A_{10}^2 - 3A_1^2 - 2A_2^2 - 2A_p^2 & -2A_2(2A_1 + A_p \cos \psi) & \frac{\sin \psi}{2A_1^2} (A_1^2 A_2^2 + 4A_1^2 A_p^2 - A_2^2 A_p^2) \\ \text{Симметричные} & & \frac{A_2}{A_1} (A_1^2 + A_2^2) \sin \psi \\ \text{члены} & -2A_2^2 & \frac{A_p}{A_1} (4A_1^2 + A_2^2) \cos \psi \end{array} \right\| \quad (8)$$

$$A_1, A_2 \neq 0.$$

Систему уравнений (3) и (6) для стационарного трехчастотного режима можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} A_1 [A_{10}^2 - 2A_{20}^2 + 3A_1^2 + 2A_p^2(1 + c^2)] - cA_p [A_{20}^2 - 2A_p^2 - 6A_1^2] &= 0, \\ A_2^2 &= A_{20}^2 - 2A_1^2 - 2A_p^2 - 2cA_1A_p, \\ \Delta p &= -\frac{\delta_2}{4} \frac{A_p}{A_1} (4A_1^2 + A_2^2) s, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c = \cos \psi$ ,  $s = \sin \psi$ ,  $A_2 \neq 0$ .

Разделим первое уравнение на  $A_{10}^3$ , второе и третье — на  $A_{10}^2$  и введем нормированные неизвестные  $A_1/A_{10}$ ,  $A_2/A_{10}$ . Тогда в системе останется только три параметра  $A_p/A_{10}$ ,  $A_{20}^2/A_{10}^2$ ,  $\Delta p/(\delta_0 - \beta_1)$ .

Возможно также двухчастотное движение:

$$A_2 = 0, \quad A_1^2 = A_{10}^2 - 2A_p^2. \quad (10)$$

Для устойчивости такого движения нужно просто потребовать, чтобы было  $A_2 < 0$  при бесконечно малых отклонениях  $A_2$  от нуля, или из (3):

$$A_{20}^2 - 2A_1^2 - 2A_p^2 - 2A_1A_p \cos \psi < 0. \quad (11)$$

При  $\Delta p = 0$  из (6) сразу следует, что  $\sin \psi = 0$ ,  $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0$  в стационарном режиме. Подставляя  $\sin \psi = 0$  в (8) и учитывая условия

устойчивости  $\Delta_3 < 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , получим  $\cos\psi < 0$ , т. е.  $\cos\psi = -1$ . Таким образом, зависимость  $A_1(A_p)$  при  $\Delta p = 0$  дается первым уравнением из (9). Подстановкой решения во второе уравнение получаем  $A_2(A_p)$ .

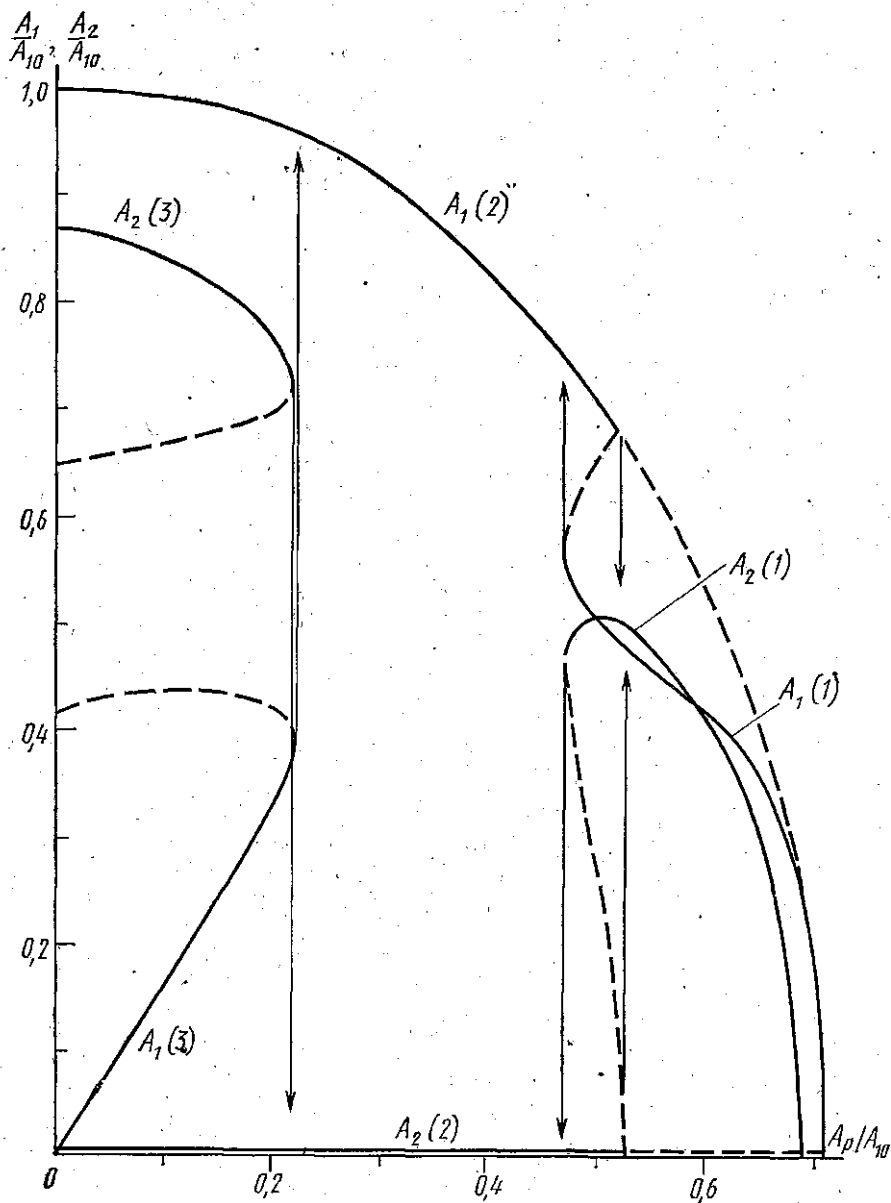


Рис. 1.  $A_{20}^2/A_{10}^2 = 0,75$ ;  $\Delta p = 0$ . Пунктиром изображены неустойчивые решения. Цифрами в скобках обозначены пары решений, соответствующих друг другу

Физически очевидна возможность существования в некоторой области значения  $A_{20}^2/A_{10}^2$  решения такого вида: в системе есть автоколебания на центральной частоте  $\omega_{20}$ ; при подаче внешней силы необходимо появляются колебания на зеркальной по отношению к  $\omega_{20}$  и  $p$  частоте

$\omega_{10}$ , но при всех  $A_p$  их амплитуда  $A_1$  существенно меньше, чем  $A_2$ , и при снятии внешней силы в системе остаются колебания на частоте  $\omega_{20}$ .

Рассмотрим другой случай: на начальный момент в системе генерируются колебания на крайней частоте  $\omega_{10}$ ; подается внешняя сила; само

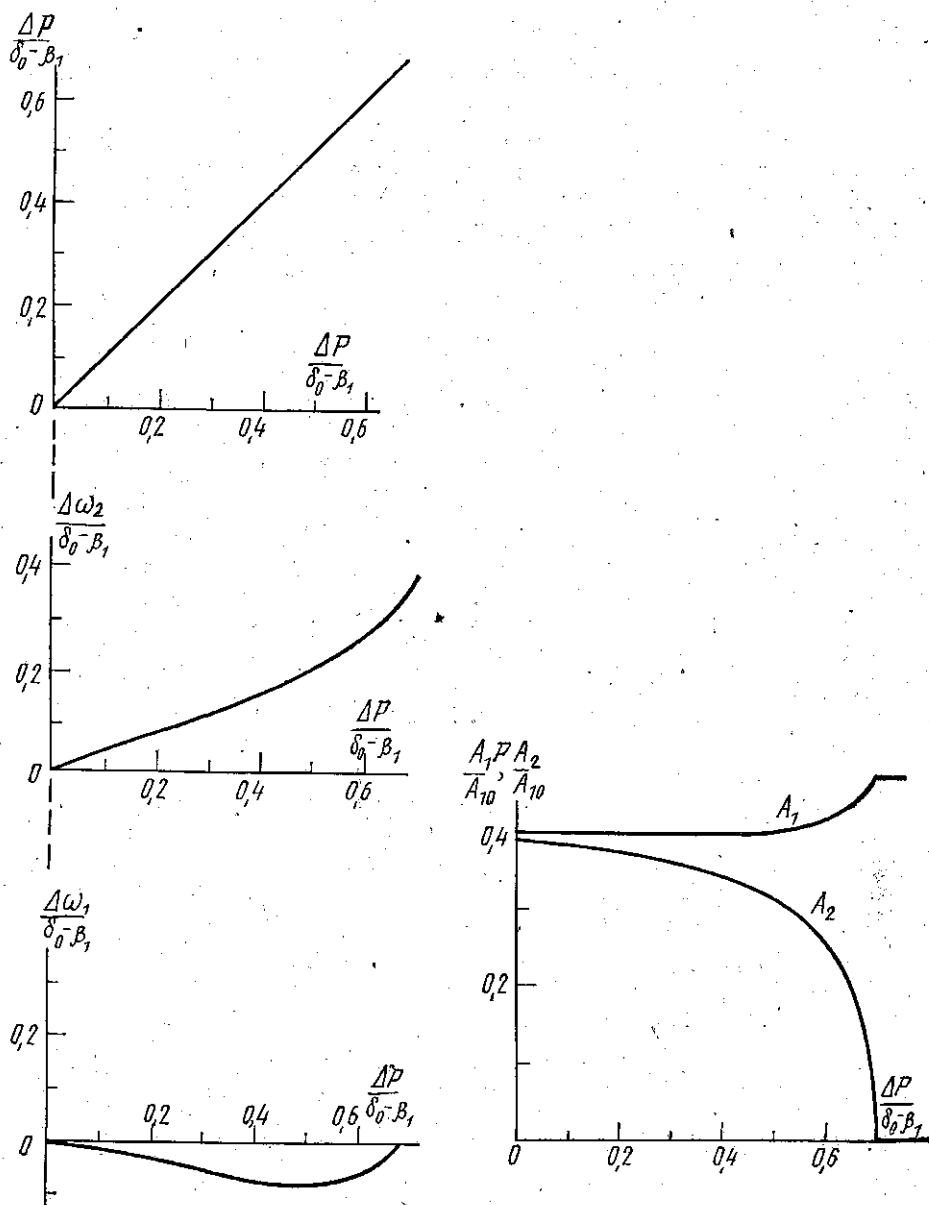


Рис. 2.  $A_{20}^2/A_{10}^2 = 0,75$ ;  $A_p/A_{10} = 0,62$ . Изображены только устойчивые решения. Частотные зависимости нечетны, амплитудные — четны

по себе это еще не приводит к появлению колебания на частоте  $\omega_{20}$ , так как при  $A_2 = 0$  подкачка на  $\omega_{20}$  отсутствует, т. е. всегда существует двухчастотное решение. По достижении  $A_p$  определенного порога это

решение может стать неустойчивым — флуктуации на  $\omega_{20}$  будут раскачиваться, и здесь можно предположить существование трехчастотных режимов двух типов (в зависимости от величины  $A_{20}^2/A_{10}^2$ ): или  $A_2$  становится существенно больше, чем  $A_1$ , и мы получаем режим, описанный выше, или же  $A_2 \ll A_1$ , и при снятии внешней силы в системе остаются только колебания  $\omega_{10}$ . Это будет происходить, если

$$A_1^2 > A_{20}^2 - A_{10}^2 + A_2^2 \quad (12)$$

в трехчастотном режиме.

Расчет показывает, что режим второго типа действительно возможен — наиболее характерные кривые  $A_i(A_p)$  для него приведены на рис. 1. Именно этот режим будет исследоваться в дальнейшем и именно он будет именоваться «трехчастотным». Вопрос о зависимости от параметров будет рассмотрен ниже.

Зависимости  $A_i(\Delta p)$ ,  $\Delta\omega_i(\Delta p)$  при  $A_p = \text{const}$  могут быть получены из (9), которая в этом случае в смысле сложности решения эквивалентна одному кубическому уравнению: задавая значение  $c$ , находим  $A_1(c)$  из первого уравнения системы, затем  $A_2(c)$  и  $\Delta p(c)$  из второго и третьего уравнений и  $\Delta\omega_i(c)$  из (7). Исклочая  $c$ , получаем  $A_i(\Delta p)$ ,  $\Delta\omega_i(\Delta p)$  при  $A_p = \text{const}$ . Устойчивость решений определялась из (8). Характерные кривые приведены на рис. 2.

На рис. 2 видно, что при изменении  $\Delta p$   $\Delta\omega_2$  меняется значительно сильнее, чем  $\Delta\omega_1$ . Это объясняется энергетической несимметрией колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . При равных  $A_1$  и  $A_2$  подкачка на  $\omega_2$  от источника внешней силы вдвое больше, чем на  $\omega_1$ , и, следовательно, частота  $\omega_2$  должна лучше управляться внешней силой. При уменьшении  $A_2$  подкачка на  $\omega_2$  будет уменьшаться пропорционально  $A_2$ , а на  $\omega_1$  — пропорционально  $A_2^2$ , т. е. эффект должен усиливаться при уменьшении  $A_{20}^2$  и при увеличении расстройки  $\Delta p$ .

Из семейства кривых типа рис. 2 получена граница области существования трехчастотного режима на плоскости параметров  $A_p/A_{10}$ ,  $\Delta p/(\delta_0 - \beta_1)$  при  $A_{20}^2/A_{10}^2 = 0,75$  (рис. 3а).

Для двухчастотного режима имеем (10) и (11). Если  $A_2 \ll A_{10}$ , то из (6):

$$\frac{\psi}{\delta_0 - \beta_1} = \frac{\Delta p}{\delta_0 - \beta_1} + \frac{4A_1 A_p}{A_{10}^2} \sin \psi.$$

Если колебания  $\omega_2$  раскачиваются, то можно считать  $\psi = 0$  (при  $A_2 \ll A_{10}$ ), и тогда

$$\sin \psi = - \frac{\Delta p}{\delta_0 - \beta_1} \cdot \frac{A_{10}^2}{4A_1 A_p}. \quad (13)$$

Из (10), (11) и (13) получаем для границы области неустойчивости двухчастотного режима:

$$12 \left( \frac{A_p}{A_{10}} \right)^4 - 4 \left( \frac{A_p}{A_{10}} \right)^2 (1 + A_0^2) + A_0^4 + \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta p}{\delta_0 - \beta_1} \right)^2 = 0, \quad (14)$$

где  $A_0^2/A_{10}^2 = 2 - A_{20}^2/A_{10}^2$ .

Решение этого уравнения для  $A_{20}^2/A_{10}^2 = 0,75$  построено на рис. 3, а.

Из (14) легко получить значение максимальной расстройки, при которой неустойчив двухчастотный режим:

$$\left(\frac{\Delta p}{\delta_0 - \beta_1}\right)_{\max}^2 = \frac{4}{3}(1 + A_0^2) - 4A_0^4 \quad (15)$$

Исследование зависимости всех полученных кривых от параметра  $A_{20}^2/A_{10}^2$  показывает:

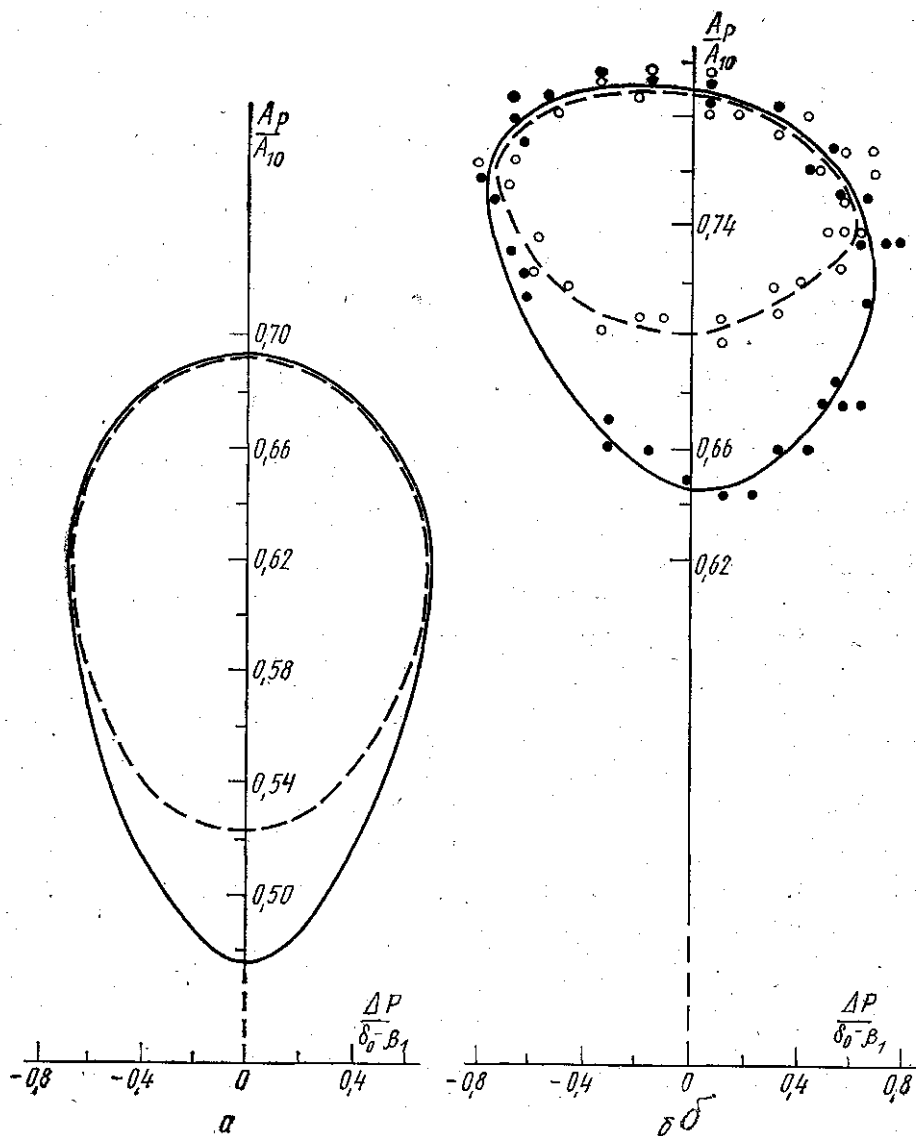


Рис. 3. а —  $A_{20}^2/A_{10}^2 = 0,75$ , в области, ограниченной сплошной линией, возможен устойчивый трехчастотный режим, в области, ограниченной пунктирной линией, — неустойчивый двухчастотный режим (теоретические результаты); б —  $A_{20}^2/A_{10}^2 = 0,77 \pm 0,04$  (экспериментальные результаты)

а) при всех  $A_{20}^2/A_{10}^2$  кривые границ областей существования трехчастотного режима и неустойчивости двухчастотного режима касаются

в точке  $\Delta p = \Delta p_{\max}$ , т. е. максимальная расстройка, при которой возможен трехчастотный режим, определяется формулой (15);

б) уменьшение  $A_{20}^2/A_{10}^2$  всегда сопровождается уменьшением  $A_2/A_{10}$  и ростом  $A_1/A_{10}$ , то же самое происходит и при увеличении расстройки  $\Delta p$ ;

в) максимальное значение  $A_{20}^2/A_{10}^2$ , при котором возможен трехчастотный режим, равно 0,78. При этом максимальны область расстроек и

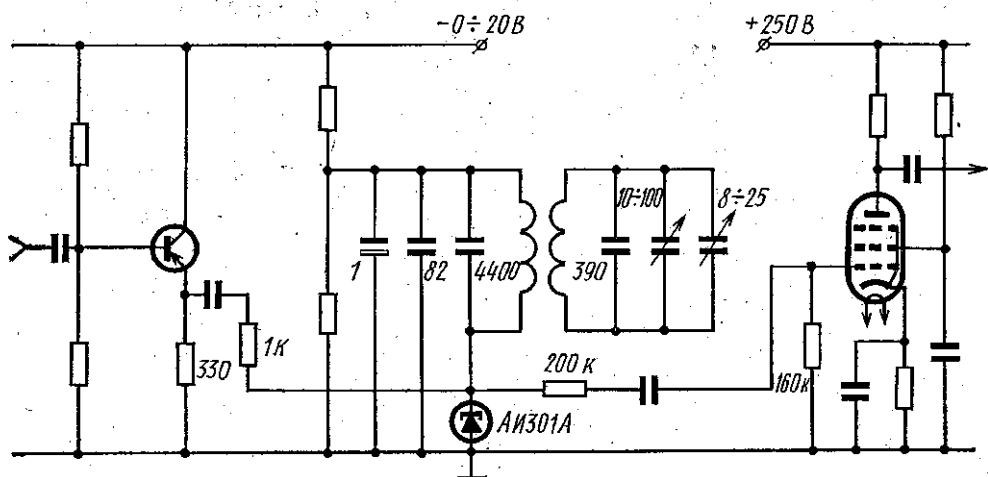


Рис. 4. Схема экспериментального генератора с ближайшими каскадами входного и выходного усилителей

область изменения  $A_p$ , при которых возможен трехчастотный режим. Области гистерезиса есть «сверху» и «снизу» по  $A_p$ . При  $A_{20}^2/A_{10}^2 > 0,78$  условие (12) не выполняется ни в одной из точек;

г) при уменьшении  $A_{20}^2/A_{10}^2$  области существования трехчастотного режима по  $A_p$  и  $\Delta p$  монотонно уменьшаются, при  $A_{20}^2/A_{10}^2 = 0,75$  исчезает гистерезис сверху, при  $A_{20}^2/A_{10}^2 = 0,67$  — снизу.

В дальнейшем границы областей существования трехчастотного режима и неустойчивости двухчастотного совпадают и описываются уравнением (14). Из (14) следует, что эти области стягиваются в точку при

$$A_{20}^2/A_{10}^2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0,63.$$

Эксперимент проводился на схеме с генератором на туннельном диоде (рис. 4). Рабочая точка диода  $U_{\text{тд}} = 280$  мВ. Амплитуда колебаний напряжения в автономном режиме в контуре туннельного диода на частоте  $\omega_{10}$   $A_{10} = 150$  мВ. Перестройкой емкости нагружающего контура в схеме были установлены следующие параметры:

$$A_{20}^2/A_{10}^2 = 0,77 \pm 0,04; \quad \frac{1}{2\pi} \omega_{10} = 0,94 \text{ МГц}; \quad \frac{1}{2\pi} \omega_{20} = 1,28 \text{ МГц}.$$

Если система генерирует колебания на частоте  $\omega_{10}$  и на нее подается очень малая внешняя сила с частотой  $p \approx \omega_{20}$ , то  $A_p$  зависит от  $p$  по резонансному закону и  $\Delta$  равна:

$$\Delta = (\delta_0 - \beta_1) (2 - A_{20}^2/A_{10}^2) \text{ при } A_p \ll A_{10}.$$

Отсюда, измерив величины  $A_{20}^2/A_{10}^2$  и  $\Delta$ , легко найти  $\delta_0 - \beta_1$ . Эксперимен-



тальное значение:  $\frac{1}{2\pi}(\delta_0 - \beta_1) = 45 \pm 4$  КГц. При снятии резонансной кривой всегда было  $A_{10}/A_p \geq 19$  дБ. Резонансная кривая оказалась не совсем симметричной. Если обозначить частоты, при которых  $A_p^2 = A_{p\max}^2/2$ , через  $p_1$  и  $p_2$  ( $A_p = A_{p\max}$  при  $p = \omega_{20}$ ), то  $(p_2 - \omega_{20})/(\omega_{20} - p_1) \approx 0,75$ .

Установление синхронного режима происходило чистым гашением, т. е. предельный цикл можно считать мягким. При кубической характеристике активного элемента полное гашение должно происходить при  $A_p = 0,71 A_{10}$ . В эксперименте было получено  $A_p \approx 0,80 A_{10}$  (точность выше 10%), т. е. ограничение третьей степенью в аппроксимации характеристики туннельного диода не совсем справедливо.

В эксперименте были получены кривые  $A_i(A_p)$  при  $\Delta p = 0$ . Качественно они вполне соответствуют кривым, изображенным на рис. 1.  $A_1$  и  $A_2$  приблизительно равны в трехчастотном режиме, но вся область трехчастотного режима смещена относительно теоретической в сторону больших  $A_p$ . Очевидно это связано с влиянием неучтенных членов степеней выше третьей в аппроксимации характеристики диода.

Экспериментальные кривые областей существования трехчастотного режима и неустойчивости двухчастотного приведены на рис. 3, б, надо отметить хорошее качественное соответствие теоретических и экспериментальных кривых. Есть и несовпадения: несимметрия, связанная с несимметрией резонансных кривых; увеличение области гистерезиса, связанное как с упрощением характеристики туннельного диода, так и с некоторым несовпадением экспериментального и теоретического значения  $A_{20}^2/A_{10}^2$ .

Измерения зависимостей  $\Delta\omega_i(\Delta p)$  при  $A_p = \text{const}$  показали, что  $\Delta\omega_1$  и  $\Delta\omega_2$  всегда имеют разные знаки и  $|\Delta\omega_1| < |\Delta\omega_2|$ . Максимальное отклонение  $\Delta\omega_{2\max}$  соответствует теоретическому значению, но  $\Delta\omega_{1\max}$  примерно в два раза больше, чем в теории, что, видимо, также связано с неточным выполнением теоретических приближений.

Наконец, в эксперименте подтверждено, что трехчастотный режим может возбуждаться только при значениях  $A_{20}^2/A_{10}^2$ , лежащих в пределах примерно от 0,65 до 0,80.

Общие закономерности, полученные в данной работе, будут, по всей видимости, справедливы и для более сложных систем с двумя резонансами, в которых невозможен автономный многочастотный режим.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лэмб У. Сб.: Квантовая оптика и квантовая радиоп физика. М., 1966.
2. Портнова Т. С. Канд. дис. Томск, 1974.
3. Азьян Ю. М., Снигирев О. В., Мкртумов А. С. «Вест. Моск. ун-та. Сер. III, физ., астрон.», 1973, 14, № 4.
4. Уткин Г. М. «Радиотехника и электроника», 1959, 4, № 12.
5. Панина А. Т., Уткин Г. М., Филатова М. М. «Радиотехника и электроника», 1969, 14, № 7.
6. Иванов С. А. «Радиотехника и электроника», 1970, 15, № 3.
7. Мельникова В. А., Постников Л. В. «Радиотехника и электроника», 1975, 20, № 7.
8. Мойсеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1969.
9. Мигулин В. В., Коваленко А. С. «Вест. Моск. ун-та. Сер. III, физ., астрон.», 1971, 12, № 3.

Поступила в редакцию  
31.3 1976 г.

Кафедра  
физики колебаний

Гмес