

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1976

УДК 62—50

Г. А. БЕНДРИКОВ, Б. Б. БУХОВЦЕВ, А. В. ЦВЕТКОВ

## ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КУБИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ПАРАМЕТРА $\rho$

Развит метод траекторий корней для нового класса систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями  $n$ -ного порядка с коэффициентами, зависящими линейно, квадратично и кубично от свободного параметра  $\rho$ . Рассмотрен аналитический метод построения корневых годографов и описаны некоторые свойства траекторий корней подобных уравнений. На примере полного корневого годографа характеристического уравнения, описывающего свободные движения модели крыла самолета, показан ряд свойств корневых годографов.

Появившееся в последнее время большое число работ, посвященных методу корневого годографа, связано с широкими возможностями этого метода, позволяющего исследовать многие динамические системы, встречающиеся в различных областях техники, например, системы с линейной зависимостью от параметра, с линейной и квадратичной зависимостью от параметра, с «чистым» запаздыванием, с распределенным запаздыванием и другие [1, 2, 3].

Настоящая работа посвящена распространению метода траекторий корней на новый класс систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями  $n$ -ного порядка, с коэффициентами, зависящими от свободного параметра как в первой и во второй, так и в третьей степени. Характеристические уравнения таких систем могут быть приведены к виду:

$$\Phi_n(\rho) + \rho\Psi_m(\rho) + \rho^2\Theta_l(\rho) + \rho^3\Lambda_q(\rho) = 0, \quad (1)$$

где  $\rho$  — свободный параметр,  $\Phi_n(\rho)$ ,  $\Psi_m(\rho)$ ,  $\Theta_l(\rho)$ ,  $\Lambda_q(\rho)$  — полиномы от  $\rho$  степени  $n$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $q$ , соответственно,  $\rho = \delta + j\omega$  — комплексная частота. Условимся называть уравнения такого вида уравнениями класса  $[n; m; l; q]$ .

К системам подобного класса относятся: аэродинамические объекты (самолеты) [4]; устройства, катящиеся по поверхности (автомобиль, шасси самолета) [4, 5]; многомерные и многоконтурные системы автоматического управления (автопилоты) [6].

В качестве свободного параметра могут быть приняты различные физические величины: скорость движения, коэффициент усиления и другие.

Метод траекторий корней представляет собой совокупность аналитических и геометрических способов построения полных корневых годографов для анализа и синтеза динамических систем. Полную картину движения корней можно представить в трехмерном пространстве с координатами  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $\rho$ . Решением исходного характеристического уравнения (1) в этом пространстве являются точки пространственной кривой  $L(\delta, \omega, \rho) = 0$ . Проекция этой кривой, например для фляттера [4], на плоскость  $(\delta, \omega)$ , определяет конфигурацию корневого годографа (рис. 1). Проекция той же кривой на плоскости  $(\delta, \rho)$ ,  $(\omega, \rho)$  определяют графики параметра. Если необходимо проследить движение корней при значениях параметра  $\rho > 0$ , изменяющихся в широких пределах, графики параметра удобно строить на плоскости  $(\delta, \lg(\rho+1))$  и  $(\omega, \lg(\rho+1))$ , как это показано на рис. 2, 3.

В случае характеристических уравнений вида (1) для построения корневых годографов систем наиболее применимы аналитические методы, такие, как метод, основанный на непосредственном решении исходного характеристического уравнения, или метод, использующий основное аналитическое уравнение и соответствующие формулы параметра.

Основное аналитическое уравнение траекторий корней получается путем разделения действительной и мнимой частей уравнения (1):

$$\begin{aligned} \Phi_r + \rho\Psi_r + \rho^2\Theta_r + \rho^3\Lambda_r &= 0, \\ j\omega(\Phi_j + \rho\Psi_j + \rho^2\Theta_j + \rho^3\Lambda_j) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Phi_r(\delta, \omega^2) = \operatorname{Re}[\Phi_n(\rho)], \quad \Phi_j(\delta, \omega^2) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}[\Phi_n(\rho)]$$

и т. д.

Равенство нулю результата системы (2) при  $\omega \neq 0$  дает выражение основного аналитического уравнения:

$$\begin{aligned} F(\delta, \omega^2) &= \begin{vmatrix} \Phi_r & \Psi_r & \Theta_r & \Lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_r & \Psi_r & \Theta_r & \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_r & \Psi_r & \Theta_r & \Lambda_r \\ \Phi_j & \Psi_j & \Theta_j & \Lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_j & \Psi_j & \Theta_j & \Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_j & \Psi_j & \Theta_j & \Lambda_j \end{vmatrix} = \\ &= (\Phi_r\Lambda_j - \Phi_j\Lambda_r)^3 + (\Theta_r\Lambda_j - \Theta_j\Lambda_r)[(\Phi_r\Theta_j - \Phi_j\Theta_r)^2 - \\ &\quad - (\Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r)(\Psi_r\Theta_j - \Psi_j\Theta_r)] + \\ &\quad + (\Psi_r\Lambda_j - \Psi_j\Lambda_r)[(\Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r)(\Psi_r\Lambda_j - \Psi_j\Lambda_r) - \\ &\quad - (\Phi_r\Lambda_j - \Phi_j\Lambda_r)(\Phi_r\Theta_j - \Phi_j\Theta_r)] - \\ &\quad - 2(\Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r)(\Theta_r\Lambda_j - \Theta_j\Lambda_r)(\Phi_r\Lambda_j - \Phi_j\Lambda_r) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученное основное аналитическое уравнение имеет степень относительно  $\omega^2$  не меньшую, чем степень уравнения (1). Например, в случае системы класса [4; 3; 2; 1], полный корневой годограф которой представлен на рис. 1, 2 и 3, степень уравнения относительно  $\omega^2$  равна 6 и относительно  $\delta$  равна 12.

Формулой параметра назовем явную функцию для  $\rho$  относительно значений  $\delta$ ,  $\omega$ , устанавливающую связь между некоторой точкой на корневом годографе, определяемом уравнением (3), и соответствующим значением параметра  $\rho$ .

Формулу параметра можно получить из системы уравнений (2):

$$\rho^2 (\Theta_r \Lambda_j - \Theta_j \Lambda_r) + \rho (\Psi_r \Lambda_j - \Psi_j \Lambda_r) + (\Phi_r \Lambda_j - \Phi_j \Lambda_r) = 0. \quad (4)$$

Тогда значения параметра:

$$\rho_{1,2} = \frac{\Psi_r \Lambda_j - \Psi_j \Lambda_r \pm \sqrt{(\Psi_r \Lambda_j - \Psi_j \Lambda_r)^2 - 4 (\Theta_r \Lambda_j - \Theta_j \Lambda_r) (\Phi_r \Lambda_j - \Phi_j \Lambda_r)}}{2 (\Theta_r \Lambda_j - \Theta_j \Lambda_r)}. \quad (5)$$

Справедливо следующее утверждение: если система уравнений вида (2) имеет не более двух совпадающих корней, то в случае совпадения двух корней оба корня квадратного уравнения (4) удовлетворяют уравнениям системы (2), а в случае совпадения одного корня по крайней мере один корень квадратного уравнения совпадает с общим корнем системы. Если система имеет три совпадающих корня (на действительной оси, пересечение одновременно трех траекторий корней в одной точке, линейная зависимость полиномов  $\Phi_n(\rho)$ ,  $\Psi_m(\rho)$ ,  $\Theta_l(\rho)$ ,  $\Lambda_q(\rho)$ ), то в качестве формулы параметра необходимо рассматривать решение Кардано для кубического относительно  $\rho$  уравнения (1).

Полученное основное аналитическое уравнение (3) и формулы параметра лежат в основе аналитического метода построения траекторий корней. Этот метод позволяет строить полные корневые годографы систем, его можно применять для поиска значений  $\rho$ , удовлетворяющих определенным условиям, например, условию достижения максимальной устойчивости или для определения границы устойчивости систем (уравнение критических частот).

Многие свойства корневых траекторий уравнений вида (1) являются подобными или даже совпадают со свойствами корневых траекторий как уравнений с линейной зависимостью от параметра, так и уравнений с линейной и квадратичной зависимостью от параметра  $\rho$ .

Перечислим сначала совпадающие свойства траекторий корневых уравнений с линейной зависимостью от параметра и уравнений вида (1). К ним относятся: непрерывность зависимости положения корней от значений параметра; симметрия траекторий относительно действительной оси (параметр  $\rho$  принимает действительные значения); наличие положительных и отрицательных корневых годографов; возможна замена параметра его обратным значением, приводящая к взаимной перестановке начальных и предельных точек (при такой замене средние точки уравнения (1) также меняются местами); возможен перенос начальных и предельных точек; справедлива теорема о параллельном перемещении мнимой оси; вся действительная ось принадлежит траекториям корней; выход корней на мнимую ось в ранее устойчивой системе означает выход на границу устойчивости; аналогично определяются углы выхода траекторий из начальных и кратных точек и входа в предельные и кратные точки; наблюдается явление перехода корней через бесконечность.

Вместе с тем есть и некоторые различия, связанные с существованием в характеристическом уравнении кубического параметра.

Доопределены понятия средних точек. Средними точками ( $\Psi$ ) и ( $\Theta$ ) назовем корни полинома, стоящего при  $\rho$  и  $\rho^2$  соответственно в уравнении (1). На рис. 1 средние точки ( $\Psi$ ) обозначены треугольниками, а средние точки ( $\Theta$ ) — квадратами. Два типа средних точек есть отличительная особенность корневых годографов с кубической зависимостью от параметра.

Общее число ветвей корневого годографа, как и прежде, определяется порядком системы, который равен удвоенному наибольшему из показателей степеней  $n$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $q$  полиномов  $\Phi_n(\rho)$ ,  $\Psi_m(\rho)$ ,  $\Theta_l(\rho)$ ,  $\Lambda_q(\rho)$

соответственно. Необходимо заметить, что на корневых годографах уравнений с кубическим параметром встречается наложение ветвей траекторий корней, при этом одной линии могут соответствовать две или даже три ветви корневого годографа.

Как и для случая линейной зависимости от параметра, для уравнения (1) можно получить фазовые уравнения. Полиномы  $\Phi_n(p)$ ,  $\Psi_m(p)$ ,  $\Theta_l(p)$ ,  $\Lambda_q(p)$  представим в виде

$$\Phi_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = a_n \prod_1^n |p - p_\nu| \exp \left( j \sum_1^n \varphi_\nu \right),$$

$$\Psi_m(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0 = b_m \prod_1^m |p - p_\mu| \exp \left( j \sum_1^m \psi_\mu \right),$$

$$\Theta_l(p) = c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0 = c_l \prod_1^l |p - p_\xi| \exp \left( j \sum_1^l \vartheta_\xi \right), \quad (6)$$

$$\Lambda_q(p) = d_q p^q + d_{q-1} p^{q-1} + \dots + d_0 = d_q \prod_1^q |p - p_\eta| \exp \left( j \sum_1^q \lambda_\eta \right).$$

Здесь  $p_\nu$ ,  $p_\mu$ ,  $p_\xi$ ,  $p_\eta$  — начальные, средние ( $\Psi$ ), средние ( $\Theta$ ) и предельные точки.  $\varphi_\nu$ ,  $\psi_\mu$ ,  $\vartheta_\xi$ ,  $\lambda_\eta$  — фазы комплексных векторов  $(p - p_\nu)$ ,  $(p - p_\mu)$ ,  $(p - p_\xi)$ ,  $(p - p_\eta)$  соответственно. Рассматривая (1) как кубическое уравнение относительно  $p$ , имеющее корни  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ , получим:

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = - \frac{c_l \prod_1^l |p - p_\xi|}{d_q \prod_1^q |p - p_\eta|} \exp j \left( \sum_1^l \vartheta_\xi - \sum_1^q \lambda_\eta \right), \quad (7)$$

$$\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3 = \frac{b_m \prod_1^m |p - p_\mu|}{d_q \prod_1^q |p - p_\eta|} \exp j \left( \sum_1^m \psi_\mu - \sum_1^q \lambda_\eta \right), \quad (8)$$

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = - \frac{a_n \prod_1^n |p - p_\nu|}{d_q \prod_1^q |p - p_\eta|} \exp j \left( \sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^q \lambda_\eta \right). \quad (9)$$

Кроме того, из (8) и (9)

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} = - \frac{b_m \prod_1^m |p - p_\mu|}{a_n \prod_1^n |p - p_\nu|} \exp j \left( \sum_1^m \psi_\mu - \sum_1^n \varphi_\nu \right). \quad (10)$$

Очевидно, непосредственное использование полученных фазовых уравнений сложно. Основная трудность применения заключается в том, что в точках, принадлежащих траекториям корней, величины

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3, \rho_1\rho_2\rho_3, \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3},$$

вообще говоря, комплексные, поскольку действительным является только один из корней  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ . Исключения составляют точки на действительной оси, на мнимой оси при особых случаях симметрии основных точек, а также точки, где происходит наложение ветвей корневых годовграфов или их пересечение. В этих точках либо все  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  действительны, либо один корень действителен и два других комплексно сопряжены. Тогда из (7), (8), (9), (10) следует:

$$\sum_1^l \theta_\xi - \sum_1^q \lambda_\eta = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

$$\sum_1^m \psi_\mu - \sum_1^q \lambda_\eta = M\pi, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

$$\sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^q \lambda_\eta = L\pi, \quad L = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

$$\sum_1^m \psi_\mu - \sum_1^n \varphi_\nu = S\pi, \quad S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14)$$

Вблизи начальных и предельных точек система фазовых уравнений также существенно упрощается. Например, вблизи начальных точек при  $\rho \rightarrow 0$  членами  $\rho^2 \Theta_i(\rho)$  и  $\rho^3 \Lambda_q(\rho)$ , вообще говоря, можно пренебречь. Следовательно, в малой окрестности начальных точек траектории корней уравнения (1) совпадают с траекториями корней уравнения

$$\Phi_n(\rho) + \rho \Psi_m(\rho) = 0$$

с линейным свободным параметром. Направление траекторий корней вблизи начальных точек определяется расположением на плоскости комплексных частот начальных и средних точек ( $\Psi$ ). Система фазовых уравнений для случая  $\rho \rightarrow 0$  сводится к фазовому уравнению (14). При исследовании фляттера, составив соответствующие фазовые уравнения, можно сразу установить, выходят ли корни из начальных точек в левую полуплоскость, т. е. устойчива ли система при малых значениях параметра  $\rho$ , и имеет ли смысл дальнейшее исследование устойчивости. Вблизи предельных точек при  $\rho \rightarrow \infty$  направление траекторий корней определяется расположением средних ( $\Theta$ ) и предельных точек и не зависит от положения начальных и средних точек ( $\Psi$ ). Система фазовых уравнений в этом случае сводится к уравнению (11).

Новые свойства имеют действительные траектории корней уравнения (1). Фазовые уравнения удовлетворяются в любой точке действительной оси. Для того, чтобы исследовать поведение корней на действительной оси, воспользуемся дискриминантом кубического уравнения:

$$D = \Theta_i^2 \Psi_m^2 - 4\Psi_m^3 \Lambda_q - 4\Theta_i^3 \Phi_n + 18\Theta_i \Psi_m \Phi_n \Lambda_q - 27\Phi_n^2 \Lambda_q^2.$$

Пусть  $D < 0$ , тогда в тех точках на действительной оси, в которых выполняется это неравенство, может проходить единственная траектория корней. Случай  $D > 0$  соответствует наложению трех ветвей траекторий на действительной оси. Уравнение  $D = 0$  определяет координаты точек

поворота на действительной оси. Таким образом, точки поворота разбивают всю действительную ось на участки, на которых возможно существование либо трех, либо одной траектории корней.

Основное аналитическое уравнение (3) сложно и громоздко, поэтому в общем случае для построения корневого годографа системы приходится применять ЭВМ. Иногда этого можно избежать, используя специфику задачи и особенности в расположении основных точек. Сравнительно много задач о фляттере крыла (динамическая неустойчивость в потоке воздуха) приводят к характеристическим уравнениям класса [4; 3; 2; 1], основные точки которых расположены на мнимой оси (вырожденный случай симметричной конфигурации основных точек относительно мнимой оси). В этих случаях уравнение критических частот, определяющее значения частот, при которых система выходит на границу устойчивости, и формулы параметра можно существенно упростить. Исходное уравнение (1) перепишем в виде:

$$R(\rho, p) = P(\rho, p),$$

где

$$R(\rho, p) = \Phi_n(p) + \rho^2 \Theta_l(p)$$

и

$$P(\rho, p) = -\rho [\Psi_m(p) + \rho^2 \Lambda_q(p)].$$

Очевидно,  $R(\rho, p)$  — четная функция аргумента  $\rho$ ,  $P(\rho, p)$  — нечетная. Можно показать, что в точке пересечения траекторий на мнимой оси справедлива система:

$$R(\rho, j\omega) = P(\rho, j\omega),$$

$$R(-\rho, j\omega) = P(-\rho, j\omega)$$

или

$$R(\rho, j\omega) = \Phi_n(j\omega) + \rho^2 \Theta_l(j\omega) = 0,$$

$$P(\rho, j\omega) = -\rho [\Psi_m(j\omega) + \rho^2 \Lambda_q(j\omega)] = 0.$$

Система совместна, если

$$\Phi_n(j\omega) \Lambda_q(j\omega) = \Theta_l(j\omega) \Psi_m(j\omega).$$

Это упрощенное уравнение критических частот. Соответствующие критическим частотам значения свободного параметра находятся по формулам:

$$\rho_{кр} = \sqrt{-\frac{\Phi_n(j\omega)}{\Theta_l(j\omega)}}$$

или

$$\rho_{кр} = \sqrt{-\frac{\Psi_m(j\omega)}{\Lambda_q(j\omega)}}.$$

При рассмотрении практических примеров часто имеет место линейная зависимость полиномов  $\Phi_n(p)$ ,  $\Psi_m(p)$ ,  $\Theta_l(p)$ ,  $\Lambda_q(p)$ , т. е. выполняется равенство

$$\alpha \Phi_n(p) + \beta \Psi_m(p) + \gamma \Theta_l(p) + \sigma \Lambda_q(p) = 0, \quad (15)$$

при всех значениях  $p$ , причем по крайней мере один из коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$  отличен от 0. В этих случаях появляется ряд новых свойств траекторий корней. Выясним, каким условиям должны удовлетворять

коэффициенты полиномов (6), чтобы имело место соотношение (15). Очевидно, что (15) можно представить в виде следующей однородной системы линейных относительно  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$  уравнений:

$$\begin{aligned} a_s \alpha + b_s \beta + c_s \gamma + d_s \sigma &= 0, \\ a_{s-1} \alpha + b_{s-1} \beta + c_{s-1} \gamma + d_{s-1} \sigma &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ a_0 \alpha + b_0 \beta + c_0 \gamma + d_0 \sigma &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $s = \max\{n, m, l, q\}$ , а коэффициенты системы определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} a_s &= \begin{cases} a_n, & \text{если } s = n \\ 0, & \text{если } s > n \end{cases} & b_s &= \begin{cases} b_m, & \text{если } s = m \\ 0, & \text{если } s > m \end{cases} \\ c_s &= \begin{cases} c_l, & \text{если } s = l \\ 0, & \text{если } s > l \end{cases} & d_s &= \begin{cases} d_q, & \text{если } s = q \\ 0, & \text{если } s > q \end{cases} \end{aligned}$$

Однородная система (16) всегда совместна, так как она имеет очевидное решение  $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0, \sigma=0$ , что соответствует линейной независимости полиномов (6). Нас интересует всякое другое нетривиальное решение.

Обозначим ранг матрицы системы через  $r$ . Если  $r=s+1$ , то система имеет единственное нулевое решение. Если  $r < s+1$ , то система имеет бесконечно много решений и полиномы (6) линейно зависимы. Отметим, что в случае симметричного расположения относительно мнимой оси основных точек, и  $n, m, l, q$  одной четности (если порядок характеристического уравнения (1) не превышает пяти) полиномы линейно зависимы.

Линейная зависимость полиномов приводит к появлению новых свойств траекторий корней: корневые годографы таких систем очень чувствительны к изменению параметров, появляются участки траекторий с большим значением кривизны, пересечение траекторий тоже результат линейной зависимости.

В качестве примера корневого годографа уравнения вида (1) можно рассмотреть характеристическое уравнение, положение корней которого нас интересует для исследования динамической устойчивости крыла в потоке воздуха [4].

$$\begin{aligned} -193,6 \cdot 10^{-6} \rho p^3 + (-967 \cdot 10^{-2} p^2 - 116) p^2 + (37,862 \cdot 10^{-2} p^3 + \\ + 29,464 \cdot 10^2 p) p + (0,83 p^4 + 17002 p^2 + 0,6264 \cdot 10^8) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\rho$  — скорость крыла самолета относительно воздуха. Корневой годограф и графики параметра представлены на рис. 1, 2, 3. Основные точки имеют координаты: начальные —  $p_{1,2} = \pm j125$ ,  $p_{3,4} = \pm j69,4$ ; средние  $|\Psi|$  —  $p_{1,2} = \pm j88,2$ ,  $p_3 = 0$ ; средние  $|\Theta|$  —  $p_{1,2} = \pm j34,5$ ; предельные —  $p_1 = 0$ .

Рассмотрим движение корней уравнения (17) по комплексной плоскости при изменении параметра  $0 < \rho < \infty$ . Из двух начальных точек

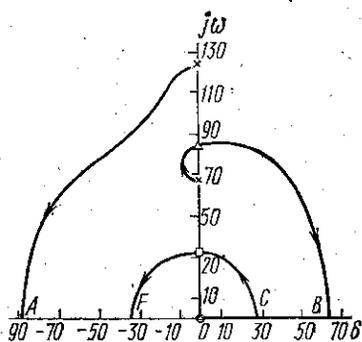


Рис. 1

(на рис. 1 обозначены крестиками) в верхней полуплоскости выходят две траектории корней в левую полуплоскость, причем корни сначала ведут себя так, как будто их движение определяется расположением только начальных и средних ( $\Psi$ ) точек. С увеличением параметра  $\rho$  от 0 до 130 м/с степень устойчивости (расстояние от мнимой оси) системы увеличивается от 0 до 8,4. При  $\rho=175$  м/с один из корней выходит на границу устойчивости системы в точке  $\omega_{кр}=85$  рад/с (рис. 1 и 2).

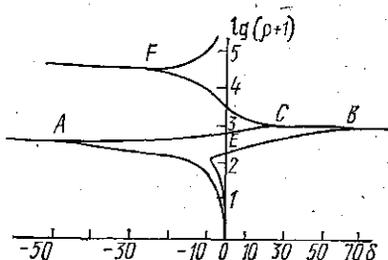


Рис. 2

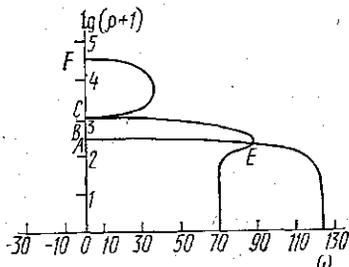


Рис. 3

Неустойчивость в данной системе связана со слиянием двух собственных частот модели крыла, соответствующих различным формам его колебаний (крутильным и изгибным). Поэтому на графике параметра  $(\omega, \lg(\rho+1))$  (рис. 3) имеется пересечение ветвей. Точка  $E$  определяет значение  $\rho$ , при котором возможна неустойчивость. Увеличение скорости  $\rho$  приведет к раскачке колебаний на частоте 85 рад/с или практически к разрушению системы. Выход корней на действительную ось в точках  $A$  и  $B$  происходит при  $\rho_A=320$  м/с,  $\rho_B=450$  м/с с образованием кратных точек. После этого корни движутся по действительной оси, которой в случае уравнения (17) принадлежат три траектории корней (с учетом траекторий, соответствующих отрицательным значениям параметра). В точке  $C$  на действительной оси происходит встреча двух корней ( $\rho_C=460$  м/с), движущихся из точек  $A$  и  $B$ , и выход двух комплексно-сопряженных корней на плоскость  $P$ . Траектории корней при  $\rho_D=3,6 \cdot 10^3$  м/с пересекают мнимую ось в точке  $D$  рядом со средней точкой ( $\Theta$ ). При  $\rho_F=3,2 \cdot 10^4$  м/с корни снова выходят на действительную ось в точке  $F$ , после чего один из корней уходит в  $\infty$ , а другой приближается к предельной точке  $O$ , достигая ее при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Таким образом, полный корневой портрет уравнения (17) дает представления о частотах и затухании колебаний на различных скоростях полета, а также о наиболее характерных свойствах в поведении корней подобных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., 1964.
2. Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. III, физ., астроном.», 1969, № 6.
3. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. III, физ. астроном.», 1967, № 4.
4. Роккар И. Неустойчивость в механике. М., 1959.
5. Келдыш М. В. Труды ЦАГИ, 1955, № 564.
6. Морозовский В. Т. Многосвязные системы автоматического регулирования. М., 1970.

Поступила в редакцию  
15.7 1976 г.

Кафедра  
физики колебаний