

В. А. БУРОВ, А. А. ГОРЮНОВ

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Доказано, что собственные функции оператора распространения, отвечающие ненулевым собственным числам, ортогональны и полны на области значений оператора распространения. Собственные функции оператора распространения переходят в дальней зоне в функции двойной ортогональности векторного аргумента. В качестве иллюстрации рассмотрена в строгой постановке задача определения распределения излучателей по известному полю в ближней зоне. Показано принципиальное различие обращенного во времени поля излучателей и поля, формирующего действительное изображение излучателей. Найден алгоритм пространственной обработки поля перед инвертированием во времени для получения истинного распределения излучателей.

В задачах, связанных с распространением волн в свободном от источников трехмерном пространстве, приходится иметь дело с оператором распространения:

$$f(x) = \int_S \frac{e^{i \frac{\omega}{c} |x-s|}}{|x-s|} \varphi(s) ds,$$

$$s \in S \subset R_3, \quad x \in X \subset R_3, \quad \varphi(s) \in L_2(S), \quad (1)$$

являющимся несамосопряженным оператором со слабой особенностью. Нахождение $f(x)$ по известной $\varphi(s)$ является задачей в общем виде весьма сложной, и при конкретных исследованиях приходится пользоваться тем или иным приближением оператора (1). Так, в теории дифракции широко известны приближения Френеля и Фраунгофера [1, 2].

Кроме этих основных приближений во многих случаях вводятся дополнительные условия, так, в голографических задачах часто предполагается, что X и S — суть параллельные плоскости в трехмерном пространстве. В задачах акустики при расчете поля в ближней зоне нередко удовлетворяются точным выражением распределения поля на оси излучателя. В задачах локации во многих случаях удовлетворяются точным выражением распределения поля по углам в дальней зоне, диаграммы направленности антенны как функции токов в раскрыве и т. д.

В настоящей статье показано, что оператор (1) обладает полным ортогональным набором собственных функций, переходящих в дальней

зоне в функции двойной ортогональности — обобщенные вытянутые сфероидальные функции.

В заключении статьи дано два примера применения собственных функций оператора (1) при решении конкретных задач в общем виде.

Вспомогательная задача для самосопряженного оператора

Если в области S имеется распределенный излучатель (рис. 1), характеризующийся функцией пространственно-спектральной плотности $v_0(s, \omega)$, то поле, порожденное этим излучателем, $U(x, t)$ в области X имеет вид

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_S \frac{v_0(s, \omega) e^{i \frac{\omega}{c} |x-s|}}{|x-s|} ds, \quad (2)$$

где $s \in S \subset R_3$, $x \in X \subset R_3$, $\omega = 2\pi\nu$ — угловая частота.

Применяя Фурье-преобразование к левой части (2), получим оператор (1):

$$v(x, \omega) = \int_S \frac{e^{i \frac{\omega}{c} |x-s|}}{|x-s|} v_0(s, \omega) ds,$$

связывающий пространственно-спектральные плотности первичного поля на S и распространившегося поля, наблюдаемого на X .

Пусть на $L_2(G)$, $G \subset R_3$ задан интегральный оператор Фредгольма:

$$\Phi\varphi(s) = \int_G D(x, s) \frac{e^{i \frac{\omega}{c} \frac{|x|-|s|}{||x|-|s||} |x-s|}}{|x-s|} \varphi(s) ds, \quad (3)$$

где

$$D(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{если } \begin{cases} x \in X \\ s \in S \end{cases} \begin{cases} x \in S, & SX \subset G \subset R_3 \\ s \in X, & S \cap X = \emptyset \end{cases} \\ 0 & \text{для остальных } x \text{ и } s. \end{cases}$$

Оператор (3) вполне непрерывен как оператор со слабой особенностью [3]. Если же $|x| \geq |s| + \varepsilon$ для любого $x \in X$ и $s \in S$ и некоторого $\varepsilon > 0$, то оператор (3) тем более вполне непрерывен, так как его ядро не превышает ε^{-1} для любых $x, s \in G$ и, следовательно, квадрат его модуля интегрируем на G [4].

Так как $D(x, s)$ — действительная функция, и

$$\frac{e^{i \frac{\omega}{c} \frac{|x|-|s|}{||x|-|s||} |x-s|}}{|x-s|} = K(x, s) = K^*(s, x),$$

то оператор (3) самосопряженный [4], [5].

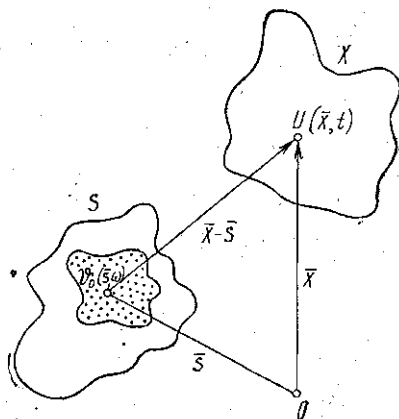


Рис. 1

Таким образом, в силу теоремы Гильберта в пространстве $L_2(G)$ существует ортонормированная система собственных функций оператора Фредгольма:

$$\Phi \varphi_i(s) = \lambda_i \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

такая, что всякий элемент вида Φf может быть разложен по ней:

$$\Phi f = \sum_i (\Phi f, \varphi_i) \varphi_i = \sum_i \lambda_i (f, \varphi_i) \varphi_i,$$

причем спектр оператора Φ в силу его вполне непрерывности дискретен и имеет предельную точку ноль [6]. Собственные числа λ_i вещественны.

Собственные функции оператора распространения

Если $|x| \geq |s| + \varepsilon$ для любого $x \in X$ и $s \in S$ и некоторого $\varepsilon > 0$, то оператор (3) может быть представлен в виде

$$\Phi \varphi(s) = \int_S \frac{e^{\frac{i\omega}{c}|x-s|}}{|x-s|} \varphi(s) ds + \int_X \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}|x-s|}}{|x-s|} \varphi(s) ds, \quad (4)$$

причем вектор x в первом интеграле пробегает только область X , а во втором — только область S .

Спроектируем $L_2(G)$ на подпространство $L_2(S)$ при помощи проекционного оператора P — оператора умножения на функцию

$$P(s) = \begin{cases} 1 & \text{если } s \in S \\ 0 & \text{для остальных } s. \end{cases}$$

Для любой функции из $L_2(S)$ оператор (3) (он же (4)) принимает вид

$$\Phi P \varphi(s) = \int_S \frac{e^{\frac{i\omega}{c}|x-s|}}{|x-s|} \varphi(s) ds, \quad x \in X$$

и, таким образом, совпадает с оператором распространения.

Тем самым доказано, что оператор распространения (1) имеет полный ортонормальный набор собственных функций при любых ограниченных областях излучения S и наблюдения X^* , удовлетворяющих условию $|x| \geq |s| + \varepsilon$, что означает наличие сферического слоя конечной толщины ε между S и X .

В частном случае областью X может являться произвольно большой шар (конечного радиуса), в середине которого находится излучающая область S .

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие возможности, возникающие при применении собственных функций оператора распространения.

Пример 1. Предположим, что нам необходимо определить функцию $v_0(s, \omega)$ излучателя, находящегося в области S по известному на области X полю $U(x, t)$, т. е. решить основную задачу пассивной локации при априорном предположении, что распределенные излучатели находятся в S . (В качестве S и X возьмем произвольные конечные области, разделенные сферическим слоем ε .)

Для нахождения $v_0(s, \omega)$ найдем сначала

$$v(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, t) e^{i\omega t} dt,$$

а затем, разложив

$$v(x, \omega) = \sum_i v_i(\omega) \varphi_i(\omega, x),$$

получим

$$v_0(s, \omega) = \sum_i \frac{v_i(\omega)}{\lambda_i(\omega)} \varphi_i(\omega, s). \quad (5)$$

При наличии помех, которые можно трактовать как поля от источников локализованных вне S , уравнение (5) примет вид

$$v(\omega, s) = \sum_i [\lambda_i(\omega) v_i^0(\omega) + n_i(\omega)] \varphi_i(\omega, s), \quad (6)$$

где $n_i(\omega)$ — коэффициенты разложения функции пространственно-спектральной плотности помехи n по системе φ_i .

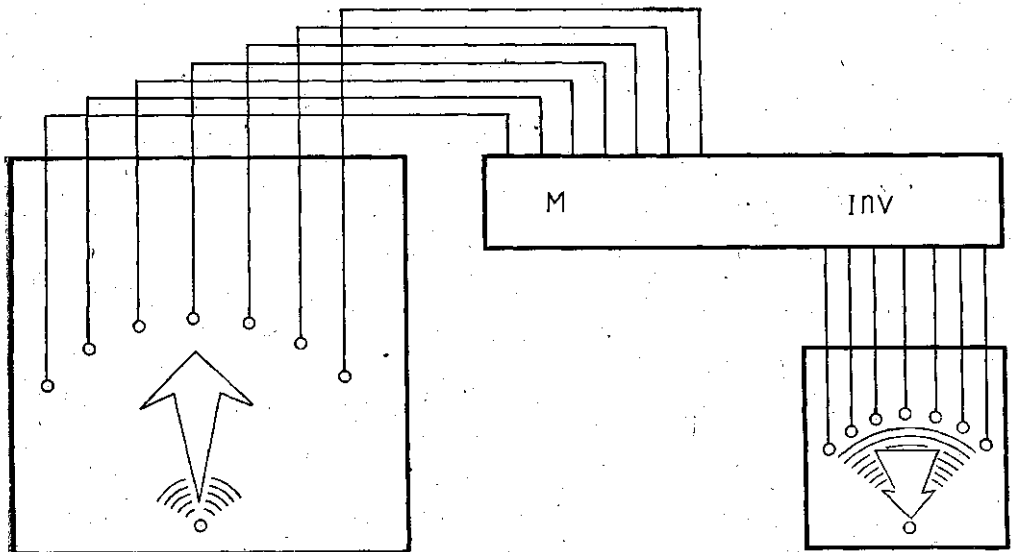


Рис. 2

К уравнению (6) можно применять те или иные статистические методы для получения оценки $\hat{v}_i^0(\omega)$, используя при этом априорную информацию о пространственно-временной статистике как помех, так и излучателей.

Пример 2. Известен следующий метод восстановления волнового поля в области излучателей по известному полю в области измерений [7]: принятый сигнал записывается, а затем излучается в обратном направлении, т. е. задним фронтом вперед, с помощью излучателей, находящихся в моделирующем объеме среды и расположенных подобно приемникам в момент измерений (рис. 2). Считается, что эта операция,

преобразующая расходящиеся волны в сходящиеся, соответствует обращению процесса. Однако в работе [8] показано, что в случае точечного излучателя и инверсии поля на бесконечной плоскости «обращения» процесса не происходит. Поле, обращенное во времени, и поле, формирующее изображение предмета, нетождественны.

Рассмотрим эту задачу для произвольных областей излучения и наблюдения.

Пусть в области S излучен сигнал, который в точке x в соответствии с (2) имеет вид

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_S \frac{v_0(s, \omega)}{|x-s|} e^{i\frac{\omega}{c}|x-s|} ds = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Выясним, какой вид будет иметь поле в области S , если из области X будет излучен сигнал

$$\tilde{U}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega = U(x, -t).$$

Тогда

$$\tilde{v}(x, \omega) = v(x, -\omega) = \int_S \frac{v_0(s, -\omega)}{|x-s|} e^{-i\frac{\omega}{c}|x-s|} ds,$$

и поле $\tilde{\tilde{U}}(r, t)$ в точке $r \in S$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{U}}(r, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_X \frac{\tilde{v}(x, \omega)}{|x-r|} e^{i\frac{\omega}{c}|x-r|} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_X dx \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-r|}}{|x-r|} \int_S \frac{v_0(s, -\omega)}{|s-x|} e^{-i\frac{\omega}{c}|x-s|} ds. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\tilde{\tilde{v}}(r, \omega) = Q^2 v_0(s, -\omega), \quad (7)$$

где Q — оператор, совпадающий с оператором (4), если в последнем область X и S поменять местами.

Разлагая $\tilde{\tilde{v}}(r, \omega)$ и $v_0(s, -\omega)$ по собственным функциям оператора Q , имеем для коэффициентов разложения

$$\tilde{\tilde{v}}_i(\omega) = \lambda_i^2(\omega) v_i^0(-\omega). \quad (8)$$

Знак минус в (7)–(8) означает, что переизлученный сигнал пройдет область S инвертированно по времени. Из (8) видно, что, заменив в области X волну, расходящуюся из S , волной, сходящейся в S , мы не получим, вообще говоря, первичное поле, инвертированное во времени.

Однако некоторое экспериментальное соответствие первичного поля и поля, обращенного [7], имеет место в силу того, что λ_i близки к единице для небольших i .

Выражение (8) вместе с тем дает метод правильного инверсионного восстановления (рис. 3). Принятая волна должна быть разложена по системе φ_i на X , затем каждая гармоника взвешивается с весом λ_i^{-2} (характер обрезания зависит от помеховых условий), после чего пре-

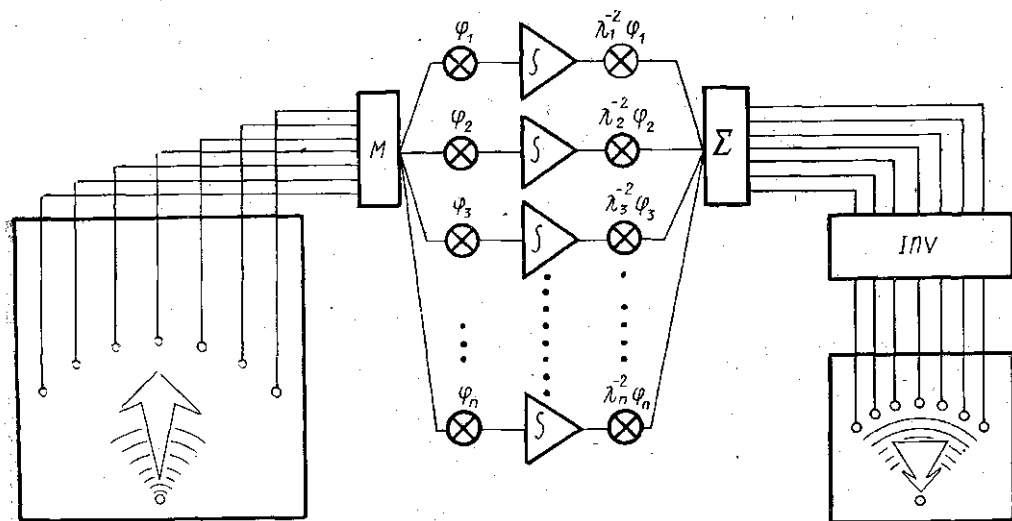


Рис. 3

образованная таким образом волна излучается задним фронтом вперед излучателями, расположенными подобно приемникам.

Подход, аналогичный вышеизложенному, удобен при расчете параметров и полей антенных решеток и непрерывных прямо-передающих апертур произвольной конфигурации.

Собственные функции оператора распространения и функции двойной ортогональности

Если начало координат находится внутри области S и $\frac{|s|}{|x|} \ll 1$ для $\forall s \in S$ и $x \in X$, то оператор распространения непрерывно переходит в оператор

$$F\varphi(s) = \frac{1}{D} \int_S e^{i \frac{\omega}{c} \left\{ |x| - \frac{sx}{|x|} \right\}} \varphi(s) ds, \quad (9)$$

где D^{-1} — множитель амплитудного расхождения, а частота удовлетворяет условию

$$\omega \ll c \frac{|x|}{|s|^2}.$$

Если нас интересует лишь угловое распределение поля, то X имеет вид сферы фиксированного радиуса D и тогда, опуская постоянный множитель в (9), получим

$$F\varphi(s) = \int_S e^{-i \frac{\omega}{c} \frac{sx}{D}} \varphi(s) ds, \quad (10)$$

что представляет собой Фурье-приближение оператора распространения [2].

Собственные функции оператора распространения в этом приближении должны переходить в собственные функции преобразования Фурье по ограниченной области, которыми, как показано в [9], являются функции двойной ортогональности — обобщенные вытянутые сфероидальные функции. Они ортогональны и полны в классе $L_2(S)$, а будучи продолжены на все евклидово пространство при помощи (10) (где $x \in R_3$), они ортогональны и на нем, образуя полную систему в классе функций на R_3 , имеющих финитный спектр, сосредоточенный в области $\frac{\omega}{cD} S \left(\frac{\omega}{cD} = \text{const} \text{ при данной частоте, а область } S \text{ предполагается симметричной относительно точки } s=0 \right)$.

Подобно тому, как аппарат функций двойной ортогональности позволяет с единой точки зрения решить класс задач аподизации (создания диаграмм направленности с максимальной энергетикой в заданном секторе или с минимальным отклонением от заданной формы [9]), рассмотренные выше функции являются удобным аппаратом для решения аналогичных задач в ближней зоне решетки (или непрерывной апертуры). К ним могут относиться задачи о максимальной концентрации энергии в заданном объеме или задачи о создании распределения излучения, максимально приближающегося к заданному. Создание узких диаграмм направленности при небольших апертурах — так называемая «сверхнаправленность» переходит здесь в «сверхфокусировку».

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967.
2. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М., 1970.
3. Крейн С. Г. Функциональный анализ. М., 1972.
4. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М., 1971.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
7. Тимошин Ю. В. «Акустический журнал», 1969, 15, вып. 3, 421—429.
8. Васильев С. А. «Акустический журнал», 1975, 21, вып. 1, 24—32.
9. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике. Перевод и научная обработка Размахина М. К. и Яковлева В. П. М., 1971.

Поступила в редакцию
20.7.1976 г.

Кафедра
акустики

0,8