УДК 535.361.

Ю. Б. Черняк,
В. Н. Луничев,
Г. Г. Соловьев

К ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ (I)

В работе рассмотрено монохроматическое рассеяние в полубесконечной $0 \leqslant z \leqslant \infty$ многокомпонентной среде с коэффициентами рассеяния σ и экстинкции k, зависящими от z при $\sigma/k \neq \mathrm{const}$. Проанализированы случаи с большим и малыми градиентами неоднородности. Построена теория возмущений по числу актов рассеяния на неоднородности, введенной в ранее однородную с $\sigma/k = \mathrm{const}$ среду. Все акты рассеяния в исходной среде учитываются точно.

При спектроаналитических исследованиях сильно рассеивающих сред процессы рассеяния неотделимы от процессов поглощения и испускания света. Целью большинства спектроаналитических исследований является определение параметров вещества, которые предполагают умение решать обратную задачу теории распространения света в веществе [1]. Необходимо иметь принципиальную возможность из отношения интенсивностей исходящего и падающего пучков света определять оптические параметры вещества.

Рассматривая рассеивающую среду, в которой центры рассеяния одновременно являются и центрами поглощения, с плавной пространственной неоднородностью можно ввести аналог оптического пути и свести задачу к пространственно-однородной. Существенно иная ситуация возникает, если вводить центры рассеяния (поглощения) пространственно-неоднородным образом с распределением, не совпадающим с распределением центров поглощения (рассеяния). В значительной части задач рассеяния такая неоднородность имеет место и ее следует учитывать. Этому и посвящена настоящая работа. На практике подобного типа пространственные неоднородности встречаются при исследованиях критической опалесценции, оптических свойств биологических объектов [2], в ракетно-космической технике [3—5], в диагностике турбулентности в газах, жидкостях и плазме [6], в рассеянии нейтронов в слоистых средах и т. п. Для определенности всюду ниже будем говорить о рассеянии света.

Постановка задачи и вывод уравнения

Рассмотрим полубесконечную среду $0 \leqslant z \leqslant \infty$, включающую в себя два компонента 1 и 2, состоящие из рассеивающе-поглощающих центров с концентрациями $n_1(z)$ и $n_2(z)$. Если соответствующие сечения поглощения будут α_1^a, α_2^a, а сечения рассеяния σ_1^s, σ_2^s, то коэффициенты поглощения $\alpha_i = n_i(z)\,\alpha_i^a$, коэффициенты рассеяния $\sigma_i = n_i(z)\,\sigma_i^s$ и коэффициенты экстинкции $k_i = \alpha_i + \sigma_i$ $(i = 1, 2)$ будут функциями от z. Всю систему можно характеризовать полным коэффициентом экстинкции $k = k_1 + k_2$ и полным коэффициентом рассеяния $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, причем их отношение будет зависеть от z:

$$\frac{\sigma}{k} = \left(1 + \frac{n_1\alpha_1^a + n_2\alpha_2^a}{n_1\sigma_1^s + n_2\sigma_2^s}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Когда σ_2^s/α_2^a (сильное поглощение) или $\sigma_2^s/\alpha_2^a \gg 1$ (сильное рассеяние), то, полагая для этих случаев $\sigma_2^s = 0$ или $\alpha_2^a = 0$, соответственно получим:

$$\frac{\sigma}{k} = \left[\left(1 + \frac{\alpha_1^a}{\sigma_1^s}\right) + \frac{n_2(z)\,\alpha_2^a}{n_1(z)\,\sigma_1^s}\right]^{-1} \quad (\sigma_2^s = 0) \tag{2}$$

и

$$\frac{\sigma}{k}\left[1 + \left(\frac{\sigma_1^s}{\alpha_1^a} + \frac{n_2(z)\,\sigma_2^s}{n_1(z)\,\alpha_1^a}\right)^{-1}\right]^{-1} \quad (\alpha_2^a = 0). \tag{3}$$

Член $(1 + \alpha_1^a/\sigma_1^s)^{-1}$ в (2), не зависящий от z, имеет смысл вероятности выживания фотона в среде, состоящей из компонента 1, а член $\frac{n_2(z)\,\sigma_2^s}{n_1(z)\,\alpha_1^a}$ в (3) — некоторую относительную вероятность поглощения на центрах второго типа. Нужно отметить, что вид формулы (1) в принципе не меняется, если рассматривать систему из $m>2$ компонентов; в этом случае

$$\frac{\sigma}{k} = \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i\,\alpha_i^a}{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i\,\sigma_i^s}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Очевидно, что при не слишком больших z световое поле $J(z, \mu, \mu_0)$ нечувствительно к пространственной неоднородности в области $z\to\infty$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $n_i(z)\to(\mathrm{const})_i$ при $z\to\infty$. Причем, на величины постоянных, входящих в эти условия, ограничений не накладывается. Полагая

$$\Lambda_\infty = \lim_{z\to\infty} \frac{\sigma(z)}{k(z)}, \tag{5}$$

которая имеет смысл вероятности выживания кванта при рассеянии или альбедо однократного рассеяния, формулы (1) и (4) можно переписать в виде

$$\Lambda(z) = \frac{\sigma(z)}{k(z)} = \Lambda_\infty\,[1 + K(z)]^{-1}, \tag{6}$$

где для m — компонентной среды:

$$K(z) = \Lambda_\infty \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i(z)\alpha_i^a}{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i(z)\sigma_i^s}\right) - 1. \tag{7}$$

Из (5), (6) и (7) с очевидностью следует, что неоднородность $K(z)\to 0$ при $z\to\infty$.

Рассматриваемую пространственно-неоднородную рассеивающую систему без учета поляризации будем описывать интегродифференциальным уравнением рассеяния для интенсивности излучения в среде $J(z, \mu, \mu_0)$ на глубине z, распространяющуюся в направлении $\arccos\mu$ к оси z

$$\mu\,\frac{\partial J(z,\mu)}{\partial z} = -k(z)\,J(z,\mu) + \frac{\sigma(z)}{2}\int\limits_{-1}^{1} J(z,\mu')\,d\mu', \tag{8}$$

в котором коэффициент экстинкции $k(z)$ и рассеяния $\sigma(z)$ зависят от z, как указано выше. Хорошо известно [7], что вместо уравнений типа

(8) удобно рассматривать интегральные уравнения. Вводя аналог оптического пути

$$\tau = \tau(z) = \int_0^z k(z')\,dz' \tag{9}$$

и решая (6) как линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка с граничными условиями

$$\begin{aligned} &J(0, \mu) = J_0(\mu) \qquad 0 < \mu < 1 \text{ или } \mu > 0, \\ &J(\infty, \mu) = 0 \qquad -1 < \mu < 0 \text{ или } \mu < 0, \end{aligned} \tag{10}$$

аналогично [7] получим интегральное уравнение:

$$f(z) = \int_0^1 J_0(\mu)\,e^{-\tau/\mu}\,d\mu + \frac{1}{2}\int_0^\infty \sigma f(z_0)\,E_1(|\tau - \tau_0|)\,dz_0, \tag{11}$$

где

$$E_1(t) = \int_0^1 e^{-t/\mu}\mu^{-1}\,d\mu = -E_i(-t)$$

и

$$f(z) = \int_{-1}^1 J(z, \mu)\,d\mu. \tag{12}$$

Пусть на поверхность полубесконечной среды под углом $\arccos\mu$ падает параллельный пучок света, такой, что через единичную нормальную к лучу площадку проходит световой поток I_0. Так как в этом случае

$$J_0(\mu) = \frac{I_0}{2\pi}\,\delta(\mu - \mu_0),\ \mu_0 \leqslant 1 - 0,$$

то интеграл $\int J_0(\mu)\,d\Omega$, взятый по полусфере, будет равен

$$\int J_0(\mu)\,d\Omega = \int J_0(\mu)\,d\mu\,d\varphi = 2\pi\int_0^1 d\mu\,J_0(\mu).$$

Тогда для $f(z)$ в (12) найдем

$$f(z) = \frac{I_0}{2\pi}\,e^{-\tau/\mu_0} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \sigma f(z_0)\,E_1(|\tau - \tau_0|)\,dz_0. \tag{13}$$

Уравнение (13) отличается от обычного типа уравнения Винера — Хопфа в задаче Милна тем, что ядро явно не разностное, так как $\sigma = \sigma(z)$. Другой существенной особенностью (13) является то, что $\tau = \tau(z)$ и $\tau_0 = \tau(z_0)$ «внутри» $E_1(|\tau - \tau_0|)$.

Оба эти отличия можно учесть единственным множителем, который дает отклонение ядра от разностного. Действительно, переходя в (13) к переменной интегрирования (9) и используя определение функции $K(z)$, согласно (7) преобразуем (13) к виду

$$f(\tau) = \frac{I_0}{2\pi}\,e^{-\tau/\mu_0} + \frac{\Lambda_\infty}{2}\int_0^\infty f(\tau_0)\,\frac{E_1(|\tau - \tau_0|)}{1 + K(\tau_0)}\,d\tau_0. \tag{14}$$

В тех же переменных выражение для выходящей интенсивности имеет вид

$$J(0, \mu) = \frac{\Lambda_\infty}{2|\mu|} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau_0/|\mu|} f(\tau_0)}{1 + K(\tau_0)} d\tau_0, \quad (15)$$

Выделение неоднородности в виде функции $K(\tau)$ позволяет в дальнейшем наиболее простым образом решить поставленную задачу и найти простую физическую интерпретацию соответствующим членам ряда теории возмущений.

Прежде чем перейти к решению уравнения (14), следует вкратце коснуться тех возможных качественно-различных неоднородностей, которые будут рассматриваться. Для этого введем характерную длину l (в единицах оптического пути), на которой $K(\tau)$ существенно изменяется. Можно выделить три качественно различных случая: $l \ll 1$ (резкая неоднородность), $l \sim 1$ и $l \gg 1$ (плавная неоднородность). Наибольшие затруднения при анализе возникают, когда $l \ll 1$ и $l \sim 1$. В настоящей работе основное внимание будет уделено случаю с резкой неоднородностью, причем предлагаемый ниже метод будет применим и для $l \sim 1$, но несколько с худшей сходимостью. Если неоднородностей несколько ($K(\tau)$ не монотонно), тогда следует ввести и рассматривать несколько характерных длин l_i. На величину $K(\tau)$ ограничения не накладываются, что при $l \ll 1$ и $K_{\max} \gg 1$ соответствует большой концентрации центров одного из типов в узкой области, причем вполне допустимо $K_{\max} l \gg 1$.

Формальное решение уравнения

Для решения уравнения (14) в случае как резкой, так и плавной неоднородности можно воспользоваться функцией Грина G_Λ и резольвентой Γ_Λ при $K=0$, которые связаны соотношением

$$G_\Lambda(\tau/\tau') = \Gamma_\Lambda(\tau/\tau') + \delta(\tau - \tau') \quad (16)$$

и удовлетворяют уравнениям

$$G_\Lambda(\tau/\tau') = \delta(\tau - \tau') + \frac{\Lambda}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau - \tau_0|) G(\tau_0/\tau') d\tau_0, \quad (17)$$

$$\Gamma_\Lambda(\tau/\tau') = \frac{\Lambda}{2} E_1(|\tau - \tau'|) + \frac{\Lambda}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau - \tau_0|) \Gamma(\tau_0/\tau') d\tau_0. \quad (18)$$

Явное выражение для функций G_Λ и Γ_Λ известно [8].

Решение уравнения

$$f(\tau) = q(\tau) + \frac{\Lambda}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau - \tau_0|) f(\tau_0) d\tau_0 \quad (19)$$

с произвольным источником $q(\tau)$ имеет вид

$$f(\tau) = q(\tau) + \int_0^\infty \Gamma(\tau/\tau') q(\tau') d\tau' \quad (20)$$

или

$$f(\tau) = \int_0^\infty G(\tau/\tau') q(\tau') d\tau'. \quad (21)$$

Случай с плавной и резкой неоднородностью можно записать в виде уравнений одинакового вида с разными функциями q и значениями параметров Λ. Для этого в случае плавной неоднородности положим

$$Q_0(\tau) = \frac{K(0) - K(\tau)}{1 + K(\tau)} \qquad (22)$$

и в соответствии с (6)

$$\Lambda_0 = \Lambda(0) \equiv \Lambda_\infty [1 + K(0)]^{-1}, \qquad (23)$$

а для резкой неоднородности

$$Q_\infty(\tau) = -\frac{K(\tau)}{1 + K(\tau)}. \qquad (24)$$

Если ввести индекс $a = 0, \infty$ уравнение (14) для плавной (0) и резкой (∞) неоднородности будет иметь следующий вид:

$$f_a(\tau) = \frac{I_0}{2\mu} e^{-\tau/\mu_0} + \frac{\Lambda_a}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau - \tau_0|) f_a(\tau_0)\, d\tau_0 + q_a(\tau), \qquad (25)$$

где

$$q_a(\tau) = \frac{\Lambda_a}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau - \tau_0|)\, Q_a(\tau_0) f(\tau_0)\, d\tau_0 \qquad (26)$$

есть добавка, создающая отличие от обычного уравнения типа Винера — Хопфа. Так как $f(\tau)$ — экспоненциально спадающая функция τ с показателем ~ 1, то существенный вклад в интеграл будет давать $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, и поскольку $Q_0(0) = 0$ и $Q_0(\tau)$ медленно меняющаяся функция, то во всей этой области интегрирования Q_0 мало, а следовательно, и $q_0(\tau)$ мало и будет $\sim l^{-1}$ $(l \gg 1)$. При резкой неоднородности вне узкой (длиной $l \ll 1$) области своего существенного изменения $K(\tau)$ мало и поэтому $Q_\infty(\tau)$ исчезает в этой области там же, где $K(\tau)$ не мало (в узкой области изменений) и даже в случае очень больших $K(\tau)$ всегда $|Q_\infty(\tau)| < 1$ и, следовательно, вклад в $q_\infty(\tau)$ будет порядка $l \ll 1$, т. е. $q_\infty(\tau) \sim l$. Таким образом, природа малости q существенно разная в случаях $l \gg 1$, $l \ll 1$.

Хорошо известно, что среднее число рассеяний в однородной среде определяется равенством

$$\bar{N} = \frac{1}{1 - \Lambda_a},$$

поэтому для того, чтобы получить решение уравнения (13) прямой итерационной процедурой, необходимо было учитывать число членов итерационного ряда порядка $\bar{N}$. Для рассеяния, близкого к консервативному ($\Lambda \approx 1$), это число может достигать $10^2 \div 10^3$, что делает метод итераций непригодным. Для устранения этой трудности преобразуем уравнение (25) так, чтобы в уравнении невозмущенное решение и рассеяние в неоднородности были бы представлены в виде отдельных слагаемых. Для этого воспользуемся соотношением (21) и запишем уравнение (25) в виде

$$f_a(\tau) = \int_0^\infty \left\{ \frac{I_0}{2\pi} e^{-\tau'/\mu_0} + q_a(\tau') \right\} G_a(\tau/\tau')\, d\tau',$$

где вместо G_{Λ_a} использовано обозначение G_a, и учитывая (26), получим

$$f_a(\tau) = \int_0^\infty \left\{ \frac{I_0}{2\pi} e^{-\tau'/\mu_0} + \frac{\Lambda_a}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau' - \tau_0|)\, Q_a f_a(\tau_0)\, d\tau_0 \right\} G_a(\tau/\tau')\, d\tau'.$$

Интеграл от первого слагаемого в фигурной скобке, очевидно, даст невозмущенное решение, т. е.

$$f_a(\tau) = f_a^{(0)}(\tau) + \frac{\Lambda_a}{2} \iint_0^\infty d\tau_0 d\tau' Q_a(\tau_0) E_1(|\tau' - \tau_0|) f_a(\tau_0) G_a(\tau/\tau'). \quad (27)$$

С другой стороны, согласно (18) и (21) справедливо тождество

$$\Gamma_a(\tau/\tau_0) = \frac{\Lambda_a}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau' - \tau_0|) G_a(\tau/\tau') d\tau',$$

которое после изменения порядка интегрирования в (27) дает возможность привести его к окончательному виду

$$f_a(\tau) = f_a^{(0)}(\tau) + \int_0^\infty Q_a(\tau_0) \Gamma_a(\tau/\tau_0) f_a(\tau_0) d\tau_0, \quad (28)$$

где вместо Γ_{Λ_a} использовано обозначение Γ_a.

Для решения уравнения (28) используем обычную итерационную процедуру, которая должна быть заведомо эффективной, поскольку интеграл, содержащий G_a со спадающим весовым множителем $f_a(\tau_0)$, мал. Тогда получим

$$f_a(\tau) = f_a^{(0)}(\tau) + \int_0^\infty Q_a(\tau_0) \Gamma_a(\tau/\tau_0) f_a^{(0)}(\tau_0) d\tau_0 +$$

$$+ \iint_0^\infty Q_a(\tau_0) Q_a(\tau_1) \Gamma_a(\tau/\tau_0) \Gamma_a(\tau_0/\tau_1) f_a^{(0)}(\tau_1) d\tau_0 d\tau_1 +$$

$$+ \iiint_0^\infty Q_a(\tau_0) Q_a(\tau_1) Q_a(\tau_2) \Gamma_a(\tau/\tau_0) \Gamma_a(\tau_0/\tau_1) \Gamma(\tau_1/\tau_2) f_a^{(0)}(\tau_2) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 + \ldots \quad (29)$$

В силу экспоненциальной сходимости интегралов, входящих в уравнение (29) при сделанных выше предположениях, ряд (29) мажорируется геометрической прогрессией и сходится. Поэтому (29) является точным решением поставленной задачи.

Рассмотрим для определенности случай с резкой неоднородностью, тогда 1-й член ряда $f_a^{(0)}(\tau)$ описывает кванты, которые не испытывают ни одного акта рассеяния на неоднородности, но в котором полностью учитывается рассеяние всех возможных кратностей вне неоднородности. Поскольку величина $Q_a d\tau$ имеет смысл числа рассеивающих центров в слое $d\tau$ ($f_a^{(0)}(\tau)$ — плотность излучения в этой области), то $f_a^{(0)}(\tau)\ Q_a d\tau$ будет число рассеянных квантов в этом слое. Резольвента $\Gamma_a(\tau)$ учитывает все акты рассеяния вне неоднородности. Таким образом, 2-й член итерационного ряда дает число квантов, однократно рассеянных внутри неоднородности. Точно также $n+1$-й член итерационного ряда описывает число квантов, n-кратно рассеянных внутри неоднородности.

Хорошо известно, что в тонком слое мутной среды практически имеет место только однократное рассеяние, поэтому первое слагаемое стандартного итерационного разложения является хорошим приближением. Аналогичная ситуация имеется и в уравнении (29). Поскольку мы в основном рассматриваем неоднородность с $l \ll 1$, то высокая кратность рассеяния не может иметь место. В силу этого порядок итерационного разложения не должен быть выше, чем указанная кратность рассеяния, и можно, по-видимому, часто ограничиваться 1-м интегральным членом для многих задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенберг Г. В. «Успехи физических наук», 1967, 91, вып. 4.
2. Левтов В. А., Попель А. С., Регирер С. А., Шадрина Н. Х. «Изв. АН СССР, механика жидкости и газов», 1971, № 6, 161.
3. Streed E. R., Arvesen J. C. A review of the status of spacecraft thermal control materials, Science of Adovanced Materials and Process Engineering, vol. II, 1967, pp. 181—192.
4. Smith A. M., Lee A. G. An analytical study of solar degradation model for thermal control materials and some renifications for accelerated solar radiatio testing, Progress in Aetronautics and Acronautics, vol. 21, 1969, pp. 639—663.
5. Моделирование тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды. Под ред. акад. Г. И. Петрова. М., 1971.
6. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
7. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. I. М., 1958.
8. Минин И. Н. ДАН СССР, 120, с. 63, 1958.

Поступила в редакцию
30.12 1975 г.
НИИЯФ