УДК 538.
574.6

В. А. Буров
А. А. Горюнов

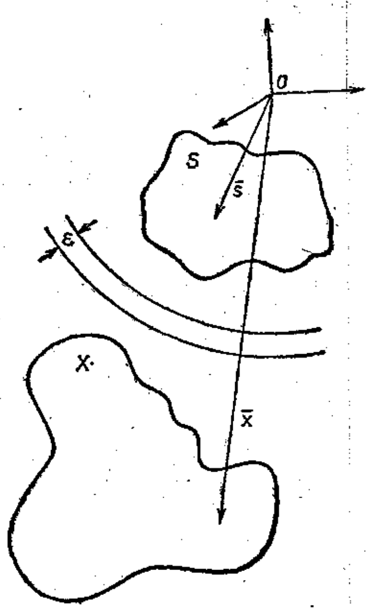
ОПТИМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ИЗЛУЧАТЕЛЯ ПО БЛИЖНЕМУ ПОЛЮ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

С помощью собственных функций оператора распространения получен алгоритм определения пространственно-спектральной функции излучателя по полю ближней зоны.

При решении задач, связанных с определением формы излучателя на основании измерений поля, излученного им, широко используются те или иные приближения оператора распространения (например, приближения Френеля, Фраунгофера), являющегося несамосопряженным оператором со слабой особенностью:

$$\Phi\varphi(\bar{s}) = \int\limits_{S} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\bar{x}-\bar{s}|}}{|\bar{x}-\bar{s}|}\varphi(\bar{s})\,d\bar{s};\quad \bar{s}\in S;\quad \bar{x}\in X S,\ X\subset R_3,\quad \varphi(\bar{s})\in L_2(S). \tag{1}$$

Однако, как показано в работе [1], оператор распространения имеет полный ортогональный набор собственных функций, которые являются идеально приспособленным базисом для точного решения обратных задач, связанных с распространением волн как в ближней зоне излучателя, так и в дальней (волновой) зоне, в которой они в пределе переходят в функции с двойной ортогональностью — обобщенные вытянутые сфероидальные функции. В настоящей работе при помощи аппарата собственных функций оператора (1) ищется алгоритм оптимального восстановления пространственно-спектральной функции излучателя, находящегося в некоторой произвольной ограниченной области S по замерам излученного им поля, проведенным на ограниченной апертуре произвольной формы, находящейся в ближней зоне излучателя.



Пусть S — произвольная ограниченная область, внутри которой находится распределенный излучатель, описываемый пространственно-спектральной функцией $v_0(s, \omega)$, подлежащей определению на основании измерения излученного поля $U(x, t)$, проведенного на конечной области X (см. рис.). Предположим, что области S и X таковы, что разделяются сферическим слоем конечной толщины $\varepsilon>0$ с центром в начале координат. Тогда спектр поля

$$V(\overline{\mathbf{x}},\ \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(\overline{\mathbf{x}},\ t)\, e^{i\omega t}\, dt, \tag{2}$$

наблюдаемого на X, связан с пространственно-спектральной функцией излучателя $v_0(\overline{\mathbf{s}},\ \omega)$ следующим образом:

$$V(\overline{\mathbf{x}},\ \omega) = \sum_j \lambda_j(\omega)\, v_j^0(\omega)\, \varphi_j(\omega,\ \mathbf{x}). \tag{3}$$

Разлагая по системе собственных функций оператора (1) правую часть выражения (3), получаем

$$V_j(\omega) = \lambda_j(\omega)\, v_j^0(\omega). \tag{4}$$

Здесь $V_j(\omega)$—коэффициенты разложения $V(x,\ \omega)$ по системе собственных функций оператора (1), $v_j^0(\omega)$ — коэффициенты разложения $v_0(\overline{\mathbf{s}},\ \omega)$ по системе собственных функций оператора (1), а $\lambda_j(\omega)$ — собственные числа этого оператора [1].

В случае, если в наблюдаемом поле $U(x,\ t)$ присутствует аддитивная помеха $N(x,\ t)$, что влечет за собой неточное определение $V_j(\omega)$, выражение (4) в силу линейности операций над полем примет вид

$$V_j(\omega) = \lambda_j(\omega)\, v_j^0(\omega) + n_j(\omega), \tag{5}$$

где $n_j(\omega)$ — аддитивное искажение $V_j(\omega)$, обусловленное помехой. Таким образом, задача состоит в получении оценки $v_j^0(\omega)$ на основании замеров $V_j(\omega)$ при наличии некоторой информации о статистических свойствах $v_j^0(\omega)$ и $n_j(\omega)$.

Если измерения $V_j(\omega)$ проводились на T-частотах для M собственных функций оператора (1), то мы имеем MT-уравнений:

$$V_j(\omega_i) = \lambda_j(\omega_i)\, v_j^0(\omega_i) + n_j(\omega_i),$$
$$j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ M; \quad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ T,$$

(i здесь и далее частотный индекс), которые можно упорядочить следующим образом:

$$\begin{gathered}
V_j(\omega_0) = \lambda_j(\omega_0)\, v_j^0(\omega_0) + n_j(\omega_0),\\
V_k(\omega_1) = \lambda_k(\omega_1)\, v_k^0(\omega_1) + n_k(\omega_1),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
V_l(\omega_i) = \lambda_l(\omega_i)\, v_l^0(\omega_i) + n_l(\omega_i),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
V_m(\omega_T) = \lambda_m(\omega_T)\, v_m^0(\omega_T) + n_m(\omega_T),\\
j,\ k,\ l,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ M.
\end{gathered} \tag{6}$$

Статистика левой части системы (6) — выборки V в отсутствии излучателя, описывается корреляционной матрицей K:

$$K = nN_{jk}^{ii'} = nN, \tag{7}$$

где n — неизвестная дисперсия, подлежащая оценке, а $N_{jk}^{ii'}$ — известная нормированная матрица, являющаяся блочно-диагональной в случае статистической независимости вектора помех по частотному индексу:

$$N_{jk}^{ll'} = \begin{Vmatrix} n_{jk}^{00} & & 0 \\ & n_{jk}^{11} & \\ & & \ddots \\ 0 & & n_{jk}^{TT} \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

в которой каждый блок n_{jk}^{ll} есть нормированная пространственная корреляционная матрица размеров $M \times M$, состоящая из элементов

$$n_{jk}^{ll} = \langle n_j(\omega_l) n_k^*(\omega_l) \rangle = \iint\limits_{XX} \langle n(\boldsymbol{x}_1, \omega_l) n^*(\boldsymbol{x}_2, \omega_l) \rangle \varphi_j(\boldsymbol{x}_1, \omega_l) \times$$

$$\times \varphi_k(\boldsymbol{x}_2, \omega_l) \, d\boldsymbol{x}_1 d\boldsymbol{x}_2,$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю, а частота ω_i постоянна в i-том блоке.

В случае, если производилось T независимых наблюдений на одной и той же частоте для M собственных функций, то матрица (8) состоит из T одинаковых блоков $M \times M$. Если же наблюдения производились для различных частот и, кроме того, помеху нельзя считать независимой по частотному индексу i, то матрица (8) перестает быть блочно-диагональной (что влечет за собой особые трудности при ее обращении).

Таким образом, запись (6)—(8) дает возможность осуществить плавный переход от ситуации, когда налицо избыточность информации (T раз повторены одни и те же измерения и любые два из них независимы) до ситуации, при которой избыточности нет — каждое измерение определяет как бы свою степень свободы. Другими словами, данный подход распространяется на наиболее общий случай, когда

$$\langle n(\boldsymbol{x}_1, \omega_1) n^*(\boldsymbol{x}_2, \omega_2) \rangle = \Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \omega_1, \omega_2), \tag{9}$$

но получение оценок проще с вычислительной точки зрения, а также надежней в силу избыточности информации, если

$$\langle n(\boldsymbol{x}_1, \omega_1) n^*(\boldsymbol{x}_2, \omega_2) \rangle \approx \Gamma_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2), \tag{10}$$

что означает, что шумовое поле абсолютно некоррелировано по частотам и одинаково коррелировано по пространству для узкой полосы частот.

При наличии в S распределенного излучателя $v_0(s, \omega)$ корреляционная матрица выборки V имеет вид

$$K = nN_{jk}^{ll'} + sS_{jk}^{ll'} = nN + sS, \tag{11}$$

где s — дисперсия интересующего нас излучения, подлежащая оценке, а S — нормированная корреляционная матрица коэффициентов разложения пространственно-спектральной функции излучателя, считающаяся известной и имеющая вид, аналогичный матрице (8), и, в случае статистической независимости коэффициентов разложения по частотному индексу i, состоящая из блоков пространственных корреляционных матриц с элементами:

$$\langle v_j^0(\omega_l) v_k^{0*}(\omega_l) \rangle = \iint\limits_{SS} \langle v_0(\boldsymbol{s}_1, \omega_l) v_0^*(\boldsymbol{s}_2, \omega_l) \rangle \varphi_j(\boldsymbol{s}_1, \omega_l) \varphi_k(\boldsymbol{s}_2, \omega_l) \, d\boldsymbol{s}_1 d\boldsymbol{s}_2.$$

В случае, когда излучатель дискретен и состоит из K излучающих элементов с координатами $s_1, s_2, \ldots, s_K$, интересно отметить два варианта, при которых корреляционная функция излучателя имеет вид

$$\langle v_0(\bar{s}_1, \omega_1) v_0^*(\bar{s}_2, \omega_2)\rangle = \sum_{\xi}^{K} \delta(\bar{s}_1 - \bar{s}_\xi)\,\delta(\bar{s}_2 - \bar{s}_\xi)\,\delta(\omega_1 - \omega_2)\,A(\omega_1), \quad (12)$$

$$\langle v_0(\bar{s}_1, \omega_1) v_0^*(\bar{s}_2, \omega_2)\rangle = \sum_{\xi,\eta}^{KK} \delta(\bar{s}_1 - \bar{s}_\xi)\,\delta(\bar{s}_2 - \bar{s}_\eta)\,\delta(\omega_1 - \omega_2)\,A_{\xi\eta}(\omega_1). \quad (13)$$

Выражение (12) соответствует физической ситуации, при которой любой элемент дискретной системы, находящийся в точке $\bar{s}_\xi$ излучает поле, коррелированное лишь само с собой при фиксированной частоте, но не коррелированное само с собой на различных частотах. Выражение (13) соответствует физической ситуации, при которой каждый элемент системы излучает поле, абсолютно не коррелированное по частоте, однако поля различных элементов системы на любой фиксированной частоте коррелированы по пространству, и величина $A_{\xi\eta}(\omega)$ $(|A_{\xi\eta}(\omega)| \leqslant 1,$ $A_{\xi\xi}(\omega) = 1)$ является мерой этой взаимосвязи.

Опуская для сокращения записи в (6) индекс i и считая, что индексы j, k принимают значения до MT, напишем функцию правдоподобия для оценки дисперсий n и s, предположив, что вектор выборки V_j $(j=0, 1, 2, \ldots, MT)$ измерялся независимо Q раз $(Q=1, 2, 3, \ldots)$:

$$L(n, s) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left[(nN + sS)^{-1} W\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{MTQ}{2}}\,|nN + sS|^{Q/2}}, \quad (14)$$

где через W обозначена случайная матрица

$$W = \sum_{q}^{Q} V_q V_q',$$

а V_q' — вектор-строка, сопряженный V_q (q — номер измерения выборки V_j; $q = 1, 2, 3, \ldots, Q$).

Оценки $\hat{n}$ и $\hat{s}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial n} L(\hat{n}, \hat{s}) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial s} L(\hat{n}, \hat{s}) = 0,$$

решить которую в аналитическом виде при произвольном отношении «сигнал/помеха» $\hat{\rho} = \hat{s}/\hat{n}$ не представляется возможным вследствие нелинейности уравнений для оценок. Однако, как показано в работе [2], при малом $\hat{\rho}$ оценки $\hat{s}$ и $\hat{n}$ можно получить в явном виде:

$$\hat{s} = \alpha^{-1}\operatorname{Sp}\left[A\frac{W}{Q}\right]; \quad \hat{n} = \alpha^{-1}\operatorname{Sp}\left[B\frac{W}{Q}\right], \quad (15)$$

где

$$\alpha = \operatorname{Sp}^2[N^{-1}S] - MT\operatorname{Sp}[(N^{-1}S)^2],$$

$$A = \operatorname{Sp}[N^{-1}S]\,N^{-1} - MTN^{-1}SN^{-1},$$

$$B = \operatorname{Sp}^2[N^{-1}S]\,N^{-1}SN^{-1} - \operatorname{Sp}[(N^{-1}S)^2]\,N^{-1},$$

которые остаются несмещенными при любом $\hat{\rho}$, но, однако, теряют свою оптимальность в случае $\hat{\rho} \sim 1$ (другими словами, дисперсия оценки дисперсии растет по сравнению с оптимальной в случае невыполнения условия $\hat{\rho} \ll 1$).

Получив, таким образом, оценки дисперсий, ищем оценки коэффициентов разложения пространственно-спектральной функции излучателя.

Максимизируя логарифм функции правдоподобия (14) по v_j^0, получаем систему из MT уравнений с MT неизвестными для каждого q ($q=1, 2, 3, ..., Q$):

$$\sum_j^{MT} \lambda_j \widehat{v}_{jq}^0 \left[\frac{S_{jk}^{-1}}{\widehat{s}} + \frac{N_{jk}^{-1}}{\widehat{n}} \right] = \sum_m^{MT} \frac{N_{km}^{-1}}{\widehat{n}} V_{mq}; \quad j=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ MT$$

или

$$\sum_j^{MT} \lambda_j \widehat{v}_{jq}^0 [S_{jk}^{-1} + \widehat{\rho} N_{jk}^{-1}] = \widehat{\rho} \sum_m^{MT} N_{km}^{-1} V_{mq}, \tag{16}$$

где $\widehat{\rho}$ определяется из (15).

Система (16) линейна относительно искомых оценок.

Усложним задачу, предположив, что об исследуемом излучателе имеется некоторая априорная информация, которую надлежит уточнить по данным наблюдения. В этом случае к уравнению (5) прибавится равенство

$$V_0(\mathrm{s},\ \omega) = v_0(\mathrm{s},\ \omega) + l(\mathrm{s},\ \omega), \tag{17}$$

в котором $V_0(\mathrm{s}, \omega)$ трактуется как априорная информация об излучателе, а $l(\mathrm{s}, \omega)$ как мера неуверенности в ней.

Вместе с тем можно поставить задачу распознавания интересующего нас излучателя $v_0(\mathrm{s}, \omega)$ среди совокупности других излучателей, распределение которых описывается единой функцией $m(\mathrm{s}, \omega)$. Таким образом, мы имеем систему для коэффициентов разложения функций $V_0(\mathrm{s}, \omega)$, $V(\boldsymbol{x}, \omega)$, $v_0(\mathrm{s}, \omega)$, $m(\mathrm{s}, \omega)$, $n(\boldsymbol{x}, \omega)$, $l(\boldsymbol{x}, \omega)$ по системе $\varphi_j(\mathrm{s}, \omega)$—собственных функций оператора (1) при фиксированной частоте:

$$\begin{gathered} V_j(\omega) = \lambda_j(\omega)[v_j^0(\omega) + m_j(\omega)] + n_j(\omega), \\ V_j^0(\omega) = v_j^0(\omega) + l_j(\omega), \\ j = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ M. \end{gathered} \tag{18}$$

Предположим, что измерения производились на T частотах. Упорядочим систему (18) аналогично системе (6) и снова опустим частотный индекс для сокращения записи, считая, что j, k принимают значения до MT. Тогда, если коэффициенты разложения помех n_j, m_j, l_j (занумерованные теперь только одним индексом j) имеют конечные дисперсии и нулевые средние, то к системе (18), состоящей теперь из MT уравнений, применим метод наименьших квадратов. Заметим, что первое требование выполняется почти всегда, а второе требует операции центровки. Оценка, полученная методом наименьших квадратов, является несмещенной оценкой с минимальной дисперсией, а в случае нормального распределения помех они идентична оценке, полученной методом максимального правдоподобия [3]. Перепишем систему (18) в матричном виде:

$$Y = AX + K, \tag{19}$$

где

$$Y=\left\|\begin{matrix} V_1\\ V_2\\ \vdots\\ V_{MT}\\ V_1^0\\ \vdots\\ V_{MT}^0\end{matrix}\right\|;\quad X=\left\|\begin{matrix} v_1^0\\ v_2^0\\ \vdots\\ v_{MT}^0\end{matrix}\right\|;\quad A=\left\|\begin{matrix} \lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_{MT}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 1_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}\right\|;\quad K=\left\|\begin{matrix} \lambda_1 m_1+n_1\\ \vdots\\ \lambda_{MT}m_{MT}+n_{MT}\\ l_1\\ \vdots\\ l_{MT}\end{matrix}\right\|.$$

Тогда оценка, полученная методом наименьших квадратов, имеет вид

$$\hat{X}=[A'D^{-1}A]^{-1}A'D^{-1}Y, \tag{20}$$

где штрих означает транспонирование, а матрица A — корреляционная матрица вектора помех D:

$$D=\left\|\begin{array}{c:c} D_0 & 0\\ \hdashline 0 & D_1\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{c:c} \lambda_j\lambda_k\langle m_j m_k^*\rangle+\langle n_j n_k^*\rangle, & 0\\ \hdashline 0 & \langle l_j l_k^*\rangle\end{array}\right\| \tag{21}$$

является блочно-диагональной в силу статистической независимости помех m_j, n_j, l_j. (В случае независимости шумового поля по частоте $n_k(\omega_1)$, $m_k(\omega_1)$ и $l_k(\omega_1)$ некоррелированы по частотному индексу, каждый из блоков D_0 и D_1 сам в свою очередь имеет блочно-диагональный вид, аналогичный матрице (8).)

Легко убедиться, что оценка (20) совпадает с оценкой максимального правдоподобия, полученной при максимизации логарифма следующей функции правдоподобия:

$$\ln L(v^0)=-\frac{1}{2}\sum_{j,k}^{MT}(V_j-\lambda_j v_j^0)D_{0jk}^{-1}(V_k-\lambda_k v_k^0)^*+$$

$$+\sum_{p,q}^{MT}(V_p^0-v_p^0)D_{1pq}^{-1}(V_q^0-v_q^0)^*],$$

которая в свою очередь адекватна функции правдоподобия (14), используемой для получения системы (16).

Попытаемся теперь оценить дисперсии. Как следует из (18), случайная матрица

$$\widetilde{W}_{jk}=[V_j-\lambda_j V_j^0][V_k-\lambda_k V_k^0]^* \tag{22}$$

является реализацией процесса с корреляционной матрицей

$$D_0+D_1=l\mathcal{L}+m\mathcal{M}+nN \tag{23}$$

(смена знака перед $l\mathcal{L}$ несущественна).

Применяя метод максимального правдоподобия [2] для получения оценок дисперсий n, m, имеем систему

$$\mathrm{Sp}[\widetilde{W}P]=l\,\mathrm{Sp}[\mathcal{L}P]+m\,\mathrm{Sp}[\mathcal{M}P]+n\,\mathrm{Sp}[NP]$$

$$\mathrm{Sp}[\widetilde{W}Q]=l\,\mathrm{Sp}[\mathcal{L}Q]+m\,\mathrm{Sp}[\mathcal{M}Q]+n\,\mathrm{Sp}[NQ], \tag{24}$$

в которой матрицы P, Q определяются следующим образом:

$$P = [l\mathscr{L} + m\mathscr{M} + nN]^{-1} \mathscr{L} [l\mathscr{L} + m\mathscr{M} + nN]^{-1},$$
$$Q = [l\mathscr{L} + m\mathscr{M} + nN]^{-1} \mathscr{M} [l\mathscr{L} + m\mathscr{M} + nN]^{-1}. \quad (25)$$

Система (24) является нелинейной относительно оценок, однако, если предположить, что одна из помех является старшей, например l, то тогда система (25) записывается приближенно в виде

$$P \approx [l\mathscr{L}]^{-1} \mathscr{L} [l\mathscr{L}]^{-1},$$
$$Q \approx [l\mathscr{L}]^{-1} \mathscr{M} [l\mathscr{L}]^{-1}$$

и система (24) линеаризуется по оценкам $\hat{n}$ и $\hat{m}$. Матрица $l\mathscr{L}$ известна точно всегда, так как она является элементом априорной информации.

При линеаризации системы (24) старшинство помехи l означает сильную неуверенность в априорной информации о форме искомого излучателя, а также о спектре излучаемого им поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буров В. А., Горюнов А. А. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1976, 17, № 6.
2. Буров В. А., Дмитриев О. В. «Радиотехника и электроника», 1973, 28, вып. 6, 1276—1279.
3. Гольцман Ф. М. Статистические модели интерпретации. М., 1971.

Поступила в редакцию
20.6 1976 г.
Кафедра
акустики