УДК 521.401

В. М. Чепурова

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ

В статье в самом общем виде выведены дифференциальные уравнения для элементов гиперболической орбиты, промежуточной для материальной точки, движущейся в поле тяготения сжатой планеты. Орбита построена на основе симметричного варианта задачи двух неподвижных центров. О возмущающей функции этих уравнений известно только, что она имеет гравитационную природу.

В работах [1, 2, 3] была построена и исследована промежуточная орбита гиперболического типа, основанная на симметричном варианте обобщенной задачи двух неподвижных центров [4]. Силовая функция этой задачи хорошо аппроксимирует потенциал сжатого тела.

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс планеты и осью Oz, направленной по оси ее вращения. Тогда дифференциальные уравнения движущейся относительно планеты точки в случае, когда постоянная энергии задачи больше нуля, имеют вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}, \tag{1}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial z},$$
$$U=\frac{fm\xi}{\xi^2+c^2\eta^2},$$

где U — силовая функция задачи, учитывающая сжатие планеты; R — возмущающая функция; x, y, z—прямоугольные, а ξ, η, w—эллипсоидальные координаты движущейся точки; c — постоянная задачи двух неподвижных центров, имеющая вполне конкретное значение для каждой планеты; связь прямоугольных координат с эллипсоидальными выражается формулами

$$x=\sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\cos w,$$
$$y=\sqrt{(\xi^2+c^2)\,(1-\eta^2)}\sin w, \tag{2}$$
$$z=\xi\eta,$$

здесь f — постоянная тяготения; m — масса планеты.

При $R=0$ уравнения (1) будут представлять собой уравнения промежуточного движения, формулы которого, выведенные в работе [2], записываются следующим образом:

$$\xi = a\left(1 - \frac{e}{\cos E}\right), \quad \eta = s\cos\varphi;$$
$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = n'\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}, \quad \varphi = u + \bar{\omega}(\psi), \quad u = \psi + \omega; \tag{3}$$

$$w = \bar{w} + \Omega + \bar{\zeta}(\psi), \quad \bar{w} = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\alpha};$$
$$\Omega = \hat{\Omega} + \mu\psi, \quad \omega = \hat{\omega}(1 + c_0) + \nu\psi; \tag{4}$$

$$M = e^*\operatorname{tg}E - \operatorname{Ln}\operatorname{tg}\left(\frac{E}{2} - 45^\circ\right) + \bar{f}_1(\psi);$$
$$M = \hat{M} + n(t - t_0) + \lambda_{00}\psi; \tag{5}$$

причем

$$p = a(1 - e^2); \quad \alpha = \sqrt{1 - s^2};$$
$$\varepsilon = \frac{c}{p}; \quad n' = \sqrt{\frac{\bar{e} - 1}{\bar{e} + 1}}; \tag{6}$$

а $\bar{\omega}(\psi)$, $\bar{\zeta}(\psi)$, $\bar{f}_1(\psi)$ — периодические части функции $\omega(\psi)$, $\zeta(\psi)$, $f_1(\psi)$, имеющие вид

$$\bar{\omega}(\psi) = A_{02}\sin 2\psi + A_{20}\sin 2u + \ldots$$
$$\bar{\zeta}(\psi) = c_{01}\sin\psi + c_{02}\sin 2\psi + \ldots$$
$$\bar{f}_1(\psi) = \lambda_{20}\sin 2u + \ldots$$

В этих формулах постоянные a, e, s, $\hat{\omega}$, $\hat{\Omega}$, $\hat{M}$ принимаются за элементы промежуточной орбиты, t_0 — за начальный момент времени, а коэффициенты $\bar{e}$, e^*, μ, ν, λ_{00}, c_0, A_{ij}, c_{ij}, λ_{ij} представляются в виде рядов, расположенных по степеням параметра ε^2 (6):

$$\bar{e} = e[1 - \varepsilon^2(e^2 - 1)(1 - 2s^2)],$$
$$e^* = e[1 + \varepsilon^2(e^2 - 1)\alpha^2],$$
$$c_0 = \frac{\varepsilon}{2}\alpha(e^2 - 1),$$
$$\nu = \frac{\varepsilon^2}{4}(12 - 15s^2), \quad \mu = c_0(1 + \nu);$$
$$\lambda_{00} = \frac{3\varepsilon^4}{16}(e^2 - 1)^{3/2}(8 - 32s^2 + 25s^4); \tag{7}$$
$$A_{02} = -\frac{\varepsilon^2}{8}s^2e^2, \quad A_{20} = \frac{\varepsilon^2}{8}s^2(e^2 - 1);$$
$$c_{01} = -2\varepsilon^2\alpha e, \quad c_{02} = -\frac{\varepsilon^2}{4}\alpha e^2;$$
$$\lambda_{20} = \frac{\varepsilon^2}{4}s^2(e^2 - 1)^{3/2}.$$

Здесь и в дальнейшем мы будем ограничиваться точностью до ε^2, поэтому, так как $\lambda_{00} \sim \varepsilon^4$, последнюю формулу (5) запишем в виде

$$M = \hat{M} + n(t - t_0).$$

Постоянные интегрирования дифференциальных уравнений промежуточного движения h, c_1, c_2 можно связать с первыми элементами a, e, s (назовем их условно «неугловыми»), если ввести обозначения:

$$-\frac{fm}{2h}=\hat{a},\quad -\frac{4c_2h}{f^2m^2}=\hat{e}^2-1,\quad -\frac{c_1^2}{2c_2}=1-\hat{s}^2. \tag{8}$$

Тогда для элементов a, e, s имеют место соотношения [3]:

$$\begin{gathered} a=\hat{a}[1+\hat{\varepsilon}^2(\hat{e}^2-1)(1-\hat{s}^2)],\\ e^2-1=(\hat{e}^2-1)[1-\hat{\varepsilon}^2(3\hat{e}+1)(1-\hat{s}^2)],\\ 1-s^2=(1-\hat{s}^2)[1-\hat{\varepsilon}^2(\hat{e}^2-1)\hat{s}^2], \end{gathered} \tag{9}$$

причем

$$\hat{p}=\hat{a}(1-\hat{e}^2),\quad \hat{\varepsilon}=\frac{c}{\hat{p}},$$

$$\varepsilon=\hat{\varepsilon}[1+2\hat{\varepsilon}^2(1-\hat{s}^2)(\hat{e}^2-1)].$$

Нетрудно также показать, что для определения аналога среднего движения n мы имеем точную формулу [3]:

$$n=\sqrt{\frac{fm}{(-\hat{a})^3}}. \tag{10}$$

Аналогичные системе (1) дифференциальные уравнения, только несколько в другой форме, были выведены Б. Н. Носковым в работе [5] для асимметричного варианта задачи двух неподвижных центров. Применяя к первым трем интегралам уравнений промежуточного движения, а также к формулам (8), (9), (3—5) «основную операцию» [6] и выполняя все выкладки примерно в том же порядке, что в работе [5], только оставаясь в прежней системе координат, после некоторых преобразований мы приходим к следующим дифференциальным уравнениям: сначала для величин $\hat{a}$, $\hat{e}$, $\hat{s}$ (8):

$$\begin{gathered} \frac{d\hat{a}}{dt}=2\hat{a}^2(\dot{x}F_x'+\dot{y}F_y'+\dot{z}F_z'),\\ \frac{d\hat{e}}{dt}=F_x'[x]+F_y'[y]+F_z'[z],\\ \frac{d\hat{s}}{dt}=\frac{1-\hat{s}^2}{\hat{s}\,\hat{p}}\{F_x'[x']+F_y'[y']+F_z'[z']\}, \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$F_q'=\frac{F_q}{fm}=\frac{1}{fm}\cdot\frac{\partial R}{\partial q},\quad q=x,\,y,\,z,$$

а величины $[x]$, $[y]$, $[z]$ и $[x']$, $[y']$, $[z']$ имеют вид соответственно

$$\begin{gathered} [x]=\frac{\hat{p}}{\hat{e}}\dot{x}-\frac{1}{\hat{a}\hat{e}}r(\dot{x}r-x\dot{r}),\\ [y]=\frac{\hat{p}}{\hat{e}}\dot{y}-\frac{1}{\hat{a}\hat{e}}r(\dot{y}r-y\dot{r}),\\ [z]=\frac{\hat{a}\hat{p}-c^2}{\hat{a}\hat{e}}\dot{z}-\frac{r}{\hat{a}\hat{e}}(\dot{z}r-z\dot{r}); \end{gathered} \tag{12}$$

$$[x'] = r(\dot{x}r - x\dot{r}) + y\frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{1-\widehat{s}^2},$$

$$[y'] = r(\dot{y}r - y\dot{r}) - x\frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{1-\widehat{s}^2},$$

$$[z'] = r(\dot{z}r - z\dot{r}) - c^2\dot{z}$$

и $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — радиус-вектор движущейся точки; продифференцировав соотношения (9), получим дифференциальные уравнения для самих «неугловых» элементов a, e, s; правые части их зависят от первых производных величин $\hat{a}$, $\hat{e}$, $\hat{s}$; и, наконец, из формул (3)—(5) получаются уравнения для «угловых» элементов — ω, Ω, M:

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right) + \nu\dot{\psi},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(\frac{d\Omega}{dt}\right) + \mu\dot{\psi}, \tag{13}$$

$$\frac{dM}{dt} = \left(\frac{dM}{dt}\right) + n;$$

где

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \omega_s\dot{s} + \omega_e\dot{e} + \omega_a\dot{a},$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right) = \Omega_s\dot{s} + \Omega_e\dot{e} + \Omega_a\dot{a}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = M_s\dot{s} + M_e\dot{e} + M_a\dot{a}.$$

Здесь символом $\left(\frac{df}{dt}\right)$ обозначаем производную любой функции f по времени, входящему только через оскулирующие элементы, за которые можно принять элементы a, e, s, ω, Ω, M; коэффициенты уравнений (14) с точностью до ε^2 представляются формулами:

$$\omega_a = \frac{1}{ae\sin\psi}\left\{1 + \frac{5}{2}\varepsilon^2 e^2(1-2s^2) + \cos\psi\, e\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{4}(8 - s^2e^2 - 16s^2)\right] - \right.$$
$$\left. - \cos 2\psi\,\frac{\varepsilon^2}{4}e^2(2-3s^2) + [\cos(2\omega+\psi) - \cos(2\omega+3\psi)]\,\frac{\varepsilon^2}{8}s^2(e^2-1)\,e\right\};$$

$$\omega_e = \frac{1}{e(e^2-1)\sin\psi}\left\{e[2+\varepsilon^2(1-2s^2)(3e^2+2)] + \right.$$
$$+ \cos\psi\left[e^2 + 1 + \frac{\varepsilon^2}{4}e^2(16 - s^2e^2 - 33s^2)\right] -$$
$$- \cos 2\psi\,\frac{\varepsilon^2}{2}e^3(2-3s^2) + [\cos(2\omega+\psi) -$$
$$\left. - \cos(2\omega+3\psi)]\,\frac{\varepsilon^2}{8}s^2e^2(e^2-1)\right\};$$

$$\omega_s = \frac{1}{s}\left[\operatorname{ctg}\varphi + \frac{\varepsilon^2}{4}s^2(e^2-1)\operatorname{ctg}u + 4\varepsilon^2 s^2 e\sin\psi + \frac{\varepsilon^2}{4}s^2e^2\sin 2\psi\right];$$

$$\Omega_a = -\frac{\varepsilon^2\alpha}{2a\sin\psi}\,[6e + \cos\psi\,(e^2+4) - \cos 2\psi\, e];$$

$$\Omega_e = -\frac{\varepsilon^2\alpha}{2(e^2-1)\sin\psi}\,[4(2e^2+1) + \cos\psi\, e(e^2+9) - \cos 2\psi\, 2e^2];$$

$$\Omega_s = -\frac{1}{\alpha s}\left[\operatorname{ctg}\varphi + \frac{\varepsilon^2}{4}s^2 e(8\sin\psi + e\sin 2\psi)\right];$$

$$M_a = -\frac{\sqrt{e^2-1}}{a e \sin\psi(\bar{e}+\cos\psi)(1+\bar{e}\cos\psi)}\left\{e(e^2+2) + \right.$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{4}e[2(e^2+3)+s^2(7e^4-13e^2-10)] +$$
$$+\cos\psi\left[3e^2+1-\frac{\varepsilon^2}{8}(4e^4-32e^2-17s^2e^4+77s^2e^2-4s^2)\right]+$$
$$+\cos 2\psi\, e\left[1-\frac{\varepsilon^2}{4}(4e^4-8e^2-2-3s^2e^4+11s^2e^2+4s^2)\right]-$$
$$-\cos 3\psi\frac{\varepsilon^2}{8}e^2[4(e^2-2)-s^2(3e^2-11)]+$$
$$+\cos 2\omega\frac{\varepsilon^2}{8}s^2(e^2-1)(e^2+2)e+\cos(2\omega+\psi)\frac{\varepsilon^2 s^2}{16}(e^2-1)(11e^2+4)+$$
$$+\cos(2\omega-\psi)\frac{\varepsilon^2 s^2}{16}(e^2-1)e^2+$$
$$+\cos 2(\omega+\psi)\frac{\varepsilon^2}{4}s^2(e^2-1)(e^2+4)e+$$
$$+\cos(2\omega+3\psi)\frac{\varepsilon^2 s^2}{16}(e^2-1)(11e^2+4)+$$
$$+\cos 2(\omega+2\psi)\frac{\varepsilon^2}{8}s^2(e^2-1)(e^2+2)e+$$
$$\left.+\cos(2\omega+5\psi)\frac{\varepsilon^2 s^2}{16}(e^2-1)e^2\right\};$$

$$M_e = -\frac{1}{e\sqrt{e^2-1}\sin\psi(1+\bar{e}\cos\psi)}\left\{\frac{e}{2}(e^2+5)+\right.$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}e[2e^4+3e^2+1-s^2(7e^4-13e^2-10)]+$$
$$+\cos\psi[3e^2+1+\varepsilon^2e^2(e^2+3-8s^2)]+$$
$$+\cos 2\psi\frac{e}{2}[e^2+1-\varepsilon^2(2e^4-3e^2-1-3e^4s^2+5e^2s^2+2s^2)]+$$
$$+\cos 2\omega\frac{\varepsilon^2 s^2}{16}(e^2-1)(5e^2+4)e+$$
$$+\cos(2\omega+\psi)\frac{\varepsilon^2}{8}s^2(e^2-1)(13e^2+4)+$$
$$+\cos(2\omega+3\psi)\frac{\varepsilon^2}{8}s^2(e^2-1)(11e^2+4)+$$
$$\left.+\cos 2(\omega+2\psi)\frac{\varepsilon^2 s^2}{16}(e^2-1)(3e^2+4)e\right\};$$

$$M_s = \frac{\varepsilon^2}{2}(e^2-1)^{3/2}s\left[\operatorname{ctg}u-\frac{4e\sin\psi}{1+\bar{e}\cos\psi}\right]. \tag{15}$$

Опираясь на формулы (6) и (9), можно вывести уравнения для величин $\widehat{p}$ и p:

$$\frac{d\widehat{p}}{dt} = F_x' 2r(\dot{x}r-x\dot{r})+F_y' 2r(\dot{y}r-y\dot{r})+F_z' 2[r(\dot{z}r-z\dot{r})+c^2\dot{z}] \tag{11a}$$

и

$$\frac{dp}{dt} = \dot{\hat{p}}[1 - \hat{\varepsilon}^2\hat{\alpha}^2\, 6\,(\hat{e}^2 + 1)] - 4\dot{\hat{s}}\,\hat{s}\,\hat{a}\,\hat{\varepsilon}^2\,(\hat{e}^4 - 1). \tag{13a}$$

Формулы (14), (15) полностью определяют величины $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$, $\left(\frac{dM}{dt}\right)$, а уравнения (13) и продифференцированные соотношения (9) представляют собой искомые дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов a, e, s, ω, M, Ω возмущенного движения в общем виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепурова В. М. «Сообщения ГАИШ», 1968, № 154.
2. Чепурова В. М. «Бюллетень ИТА», 1969, 12, № 2 (135).
3. Чепурова В. М. «Сообщения ГАИШ», 1969, № 159.
4. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. «Астрономический журнал», 1963, 40, вып. 2.
6. Носков Б. Н. «Сообщения ГАИШ», 1970, № 165.
7. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1963.

Поступила в редакцию
6.6 1976 г.
ГАИШ