УДК 535.361 : 585.683

Ю. Б. Черняк
Г. Г. Соловьев

К ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ (II)

Для двух простейших моделей пространственной зависимости $\Lambda(z)$ в первом и втором порядках теории возмущений (развитой в предыдущей работе [1]) найдены интенсивность выходящего излучения и коэффициент отражения при монохроматическом рассеянии в полубесконечной среде. Кратко рассмотрены высшие порядки теории возмущений. Результаты работы применимы в первую очередь для модельного учета шероховатости поверхности светорассеивающей среды, а также для определения светорассеивающих характеристик диффузно отражающих красок при изменении свойств их приповерхностных слоев.

В работе [1] была построена теория возмущений по числу актов рассеяния в «области неоднородности». Ниже рассмотрено применение результатов этой работы к вычислению интенсивности выходящего излучения и коэффициента отражения полубесконечной ($0 \leqslant z < \infty$), монохроматически рассеивающей среды с коэффициентами отражения и экстинкции, резко зависящими от z в «области неоднородности». Эта область предполагается локализованной вблизи поверхности $z=0$, причем форма неоднородности определяется двумя простейшими моделями, вводимыми ниже. Предпочтительность той или иной модели, разумеется, связана с механизмом образования неоднородности, и модель следует выбирать из априорных (обычно неоптических) соображений. Полученные формулы позволяют в первом и втором порядках теории возмущений в явном виде выделять влияние неоднородности, т. е. решать обратную задачу рассеяния и дают возможность по соотношению между интенсивностями входящего и выходящего излучения определять оптические характеристики среды в области неоднородности. Многократное рассеяние света вне неоднородности полностью отделено и учитывается точно.

Первый порядок теории возмущений

Ряд теории возмущений в [1] был построен для функции источников $f(\tau, \mu_0)$, имеющий смысл усредненной по углам $\arccos \mu_0$ интенсивности $J(z(\tau), \mu, \mu_0)$ на оптической глубине τ от поверхности. Там же была найдена формула ([1], (15)) для интенсивности выходящего излучения $J(0, \mu, \mu_0) \equiv J(\mu, \mu_0)$ (при наличии возмущения) в виде однократного интеграла линейно содержащего функцию источников. Поскольку n-й член ряда для функции источников ([1], (29)) выражается в виде n-кратного интеграла, то соответствующий член ряда для выходящей интенсивности имеет вид $n+1$-кратного интеграла. Используя свойства резольвенты можно вычислить внешний интеграл и понизить порядок интегрирования на единицу. В общем случае это делается точно так же, как и в первом порядке, к которому мы и переходим.

В выражении ([1], (15)) для интенсивности излучения $J(\mu, \mu_0)$, выходящего под углом $\arccos \mu$ к нормали к поверхности среды, выделим возмущающий член пропорциональный $Q(\tau)$ вида ([1], (24)) и получим

$$J(\mu, \mu_0) = \frac{\Lambda}{2\mu}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-\tau/\mu} f(\tau, \mu_0)\, d\tau + \int\limits_0^\infty Q(\tau) e^{-\tau/\mu} f(\tau, \mu_0)\, d\tau\right\}. \tag{1}$$

Напомним, что через μ_0 обозначен cos угла падения излучения к внутренней нормали к поверхности рассеивающей среды. Подставляя в (1) разложение ([1], (29)) с точностью до членов первого порядка включительно, найдем

$$J^{(0)}(\mu, \mu_0) - J(\mu, \mu_0) = \frac{\Lambda}{2\mu}\int\limits_0^\infty Q(\tau) f^{(0)}(\tau, \mu_0)\left\{e^{-\tau/\mu} + \int\limits_0^\infty e^{-\tau'/\mu}\Gamma(\tau'|\tau)\, d\tau'\right\} d\tau, \tag{2}$$

где $J^{(0)}$ — невозмущенная интенсивность.

Учитывая симметрию резольвенты $\Gamma(\tau|\tau')$, нетрудно видеть, что в выражении в фигурных скобках в (2) есть невозмущенная функция источников $f^{(0)}(\tau, \mu)$, отвечающая падающему под углом arccos μ (но не μ_0, как обычно) излучению с интенсивностью $I_0 = 2\pi$. Отсюда находим следующую весьма симметричную по μ, μ_0 формулу:

$$J^{(0)}(\mu, \mu_0) - J(\mu, \mu_0) = \frac{\pi\Lambda}{I_0\mu}\int\limits_0^\infty f^{(0)}(\tau, \mu_0)\, Q(\tau)\, f^{(0)}(\tau, \mu)\, d\tau. \tag{3}$$

Таким образом, вне зависимости от конкретной формы $Q(\tau)$ поправка первого порядка к выходящей интенсивности (умноженная на μ, что связано с нормировкой падающего излучения) есть симметричная функция μ, μ_0.

Перейдем теперь к случаю, когда неоднородность сосредоточена в узкой, глубиной $h \ll 1$, области у поверхности $z=0$. Так как $h \ll 1$ и возмущение $Q(\tau) = -K(\tau)/(1+K(\tau))$ заметно отлично от нуля лишь при $\tau \leqslant h$, то для вычисления интеграла в (3) можно воспользоваться асимптотиками функций источников $f^{(0)}(\tau, \mu)$ и $f^{(0)}(\tau, \mu_0)$ при $\tau \to 0$. Чтобы найти эти асимптотики, воспользуемся выражением для $f^{(0)}$, используя стандартную функцию источников $\Phi(\tau, \Lambda) \equiv \Gamma(\tau|0)$.

Согласно [2, 3], имеем

$$f^{(0)}(\tau, \mu_0) = \frac{I_0}{2\pi}\varphi(\mu_0, \Lambda)\left\{e^{-\tau/\mu_0} + \int\limits_0^\tau e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu_0}}\Phi(\tau', \Lambda)\, d\tau'\right\}, \tag{4}$$

где $\varphi(\mu_0, \Lambda)$ — известная функция Амбарцумяна [2—5]. Поскольку $\Phi = O(\ln\tau)$ при $\tau \to 0$, то второе слагаемое в (4) есть $O(h \ln h)$ при $\tau \leqslant h$. Пренебрегая этим членом по сравнению с единицей, получим

$$f^{(0)}(\tau, \mu_0) \backsim \frac{I_0}{2\pi}\varphi(\mu_0, \Lambda)\, e^{-\tau/\mu_0}. \tag{5}$$

Обозначая $\Delta J = J - J^{(0)}$ и подставляя (5) в (3), найдем

$$\Delta J = -\frac{I_0}{4\pi\mu}\varphi(\mu_0)\,\varphi(\mu)\int\limits_0^\infty Q(\tau)\, e^{-\tau(1/\mu + 1/\mu_0)}\, d\tau. \tag{6}$$

Интеграл в (6), представляющий собой лапласовское преобразование возмущения $Q(\tau)$, может быть явно вычислен для широкого класса функций $Q(\tau)$, мы, однако, рассмотрим две наиболее интересные простейшие модели: узкие ступенчатые функции

$$K_1(\tau) = \begin{cases} b, & 0 \leqslant \tau \leqslant h; \\ 0, & \tau > h \end{cases} \qquad Q_1(\tau) = -\begin{cases} \dfrac{b}{1+b}, & 0 \leqslant \tau \leqslant h \\ 0, & \tau > h \end{cases} \tag{7}$$

и экспоненциально спадающие функции

$$K_2(\tau) = a/(e^{-\tau/h} - a); \quad Q_2(\tau) = -ae^{-\tau/h}; \quad (a < 1). \tag{8}$$

Обе модели хорошо применимы к светорассеивающим краскам, изменяющим с течением времени свои свойства вблизи поверхности.

Как известно [2—5], невозмущенная интенсивность $J^{(0)}(\mu, \mu_0)$ выражается через функции Амбарцумяна следующим образом:

$$J^{(0)}(\mu, \mu_0) = \frac{I_0\Lambda}{4\pi} \frac{\varphi(\mu)\varphi(\mu_0)}{\mu + \mu_0} \mu_0. \tag{9}$$

Поэтому в случае ступенчатой функции $Q(\tau)$ для $\Delta J \equiv \Delta J_1$ из (6) и (7) получим

$$\Delta J_1(\mu, \mu_0) = -J^{(0)}(\mu, \mu_0) \frac{b}{1+b} [1 - e^{-h(1/\mu + 1/\mu_0)}]. \tag{10}$$

Аналогично для экспоненциальной модели получим

$$\Delta J_2(\mu, \mu_0) = -J^{(0)}(\mu, \mu_0) \frac{a \cdot (\mu + \mu_0) \cdot h}{\mu\mu_0 + h \cdot (\mu + \mu_0)}. \tag{11}$$

Если разложить экспоненту в (10) и ограничиться главным по h членом в (10) и (11), то ΔJ_1 и ΔJ_2 совпадут, если «высоты» ступенек $K_1(\tau)$ и $K_2(\tau)$ равны, т. е. $a = b/(1+b)$.

Из (10) и (11) в общем случае следует, что $\Delta J = O(h)$, если $\mu = O(1)$ и $\mu_0 = O(1)$. Наоборот, в области $\mu_0 = O(h)$ или $\mu = O(h)$ $\Delta J = 0(1)$, т. е. поправки оказываются велики, если входящие или выходящие лучи почти касаются поверхности $\tau = 0$. Тот же результат можно получить из (6) при более общих, чем (7) или (8), предположениях о $Q(\tau)$.

Формула (10) допускает следующую простую интерпретацию. Вероятность выживания фотона, входящего в тонкий слой толщины h под углом $\arccos \mu_0$, будет e^{-h/μ_0}, а для выходящего под углом $\arccos \mu$ — $e^{-h/\mu}$, поэтому квадратная скобка в (10) дает вероятность поглощения в указанном слое. Далее, поскольку в первом порядке учитываются лишь однократные акты взаимодействия в слое $0 \leqslant \tau \leqslant h$, возможны альтернативы: либо фотон в этом слое взаимодействует с рассеивающим центром, либо с поглощающим. Множитель $b/(1+b)$ и учитывает соответствующую вероятность. Иначе, этот множитель дает вероятность того, что фотон сохранит прямолинейную траекторию в слое. Если фотон уже рассеялся, то в первом порядке он не будет более взаимодействовать в рассматриваемом слое. Для ступенчатой модели формулу (10) можно было бы вывести на основе элементарных вероятностных соображений, приведенных выше, однако для уже экспоненциальной модели (8) это было бы затруднительно.

Большой интерес представляет изменение в результате появления неоднородности коэффициента отражения $\Delta R^{(1)}(\mu_0, \Lambda)$:

$$\Delta R^{(1)}(\mu_0, \Lambda) = \frac{2\pi}{I_0} \int_0^1 \Delta J(\mu, \mu_0) \mu d\mu. \tag{12}$$

В случае экспоненциальной неоднородности вида (8), полагая $h_1 = h/(\mu_0+h)$, из (11) и (12) найдем

$$\Delta R^{(1)}(\mu_0, \Lambda) = -\frac{\Lambda a h_1}{2}\varphi(\mu_0)\mu_0\left\{\int\limits_0^1 \varphi(\mu)\,d\mu - h_1\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\mu)\,d\mu}{\mu+h_1}\right\}. \quad (13)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках представляет собой нулевой момент $\alpha_0(\Lambda)$ функции $\varphi(\mu, \Lambda)$, который, как известно, равен [2]

$$\alpha_0(\Lambda) \equiv \int\limits_0^1 \varphi(\mu)\,d\mu = \frac{2}{\Lambda}\left(1-\sqrt{1-\Lambda}\right).$$

Второе слагаемое имеет в точности вид интегрального члена в уравнении Амбарцумяна [2], используя которое, получим окончательно

$$\Delta R^{(1)}(\mu_0, \Lambda) = -ah_1\cdot\varphi(\mu_0, \Lambda)\mu_0\left[1-\sqrt{1-\Lambda}-\frac{\varphi(h_1, \Lambda)-1}{\varphi(h_1, \Lambda)}\right]. \quad (14)$$

Формулой (14) имеет смысл пользоваться при значениях $\mu_0 \backsim h$, т. е. $h_1 \backsim 1$ и $\varphi(h_1, \Lambda)-1 \backsim 1$. При $\mu_0 \gg h$ можно сильно упростить (14) и получить

$$\Delta R^{(1)} = -ah\varphi(\mu_0, \Lambda)\left(1-\sqrt{1-\Lambda}\right). \quad (15)$$

В случае неоднородности в форме ступеньки (7) коэффициент отражения найти значительно сложнее из-за резко неравномерной сходимости интеграла по μ (12), содержащего экспоненту из (10). Поэтому воспользуемся интегральным представлением ([1], (15)) с $K(\tau)=0$ для $I^{(0)}(\mu, \mu_0)$ и выполним сначала интегрирование по μ. В результате найдем

$$\Delta R^{(1)} = \frac{b}{1+b}R^{(0)} - \frac{2\pi}{I_0}\,\frac{be^{-h/\mu_0}}{1+b}\,\frac{\Lambda}{2}\int\limits_0^\infty f^{(0)}(\tau, \mu_0)\,E_2(\tau+h)\,d\tau, \quad (16)$$

где так же как в [3] мы обозначили $E_n(t) = \int\limits_0^1 e^{-t/\mu}\mu^{n-2}\,d\mu$, а $R^{(0)}$ — невозмущенный коэффициент отражения, который можно представить в аналогичной форме

$$R^{(0)}(\mu_0, \Lambda) = \frac{2\pi}{I_0}\cdot\frac{\Lambda}{2}\int\limits_0^\infty f^{(0)}(\tau, \mu_0)\,E_2(\tau)\,d\tau. \quad (17)$$

Разложив в (16) $E_2(\tau+h)$ по степеням h и воспользовавшись (17), с точностью до членов первого порядка получим

$$\Delta R^{(1)} = \frac{bR^{(0)}}{1+b}\left(1-e^{-h/\mu_0}\right) + \frac{2\pi h}{I_0}\,\frac{be^{-h/\mu_0}}{1+b}\int\limits_0^\infty f^{(0)}(\tau, \mu_0)\,\frac{dE_2(\tau)}{d\tau}\,d\tau.$$

Поскольку $dE_2(\tau)/d\tau = -E_1(\tau)$ есть ядро интегрального уравнения для $f^{(0)}(\tau, \mu_0)$, то интеграл в последней формуле вычисляется точно и с учетом (4) или (5) приводится к виду

$$\Delta R^{(1)} = \frac{R^{(0)}b}{1+b}\left(1-e^{-h/\mu_0}\right) + \frac{hb}{1+b}\left[\varphi(\mu_0)-1\right]. \quad (18)$$

Любопытно, что как (14), так и (18) распадаются на пару слагаемых, которые по-разному ведут себя при $\mu_0 \backsim h$, когда первое имеет порядок

$O(1)$, а второе — $O(h \ln h)$. Таким образом, даже при малом изменении оптических характеристик приповерхностного слоя полубесконечной рассеивающей среды происходит радикальное изменение коэффициента отражения в области углов падения, близких к 90°.

Второй порядок теории возмущений

Если вероятность взаимодействия фотона с «новыми» центрами, образующими неоднородность, невелика, можно ограничиться первым порядком теории возмущений. Это условие заведомо справедливо в тех случаях, когда неоднородность локализована в чрезвычайно узком приповерхностном слое, как это имеет место, например, при повреждении светорассеивающих сред ультрафиолетовым или низкоэнергетическим корпускулярным ионизирующим излучениями. Однако как для оценки точности формул первого порядка, так и для ситуаций, когда вероятность двукратного рассеяния в слое сравнима с единицей, необходимо иметь пригодное при всех μ, μ_0 выражение для $\Delta J^{(2)}(\mu, \mu_0)$ — поправки второго порядка к интенсивности, выходящего излучения. Ниже $\Delta J^{(2)}(\mu, \mu_0)$ будет найдено для случая экспоненциальной неоднородности (8) с точностью до главных по h членов.

В вычислениях $J^{(1)}$ уже в (6) были использованы асимптотики функций $f^{(0)}(\tau, \mu)$ и $f^{(0)}(\tau, \mu_0)$ при $\tau \to 0$, т. е. был отброшен второй член в (4). Обозначим через $\Delta^{(12)}J(\mu, \mu_0)$ ошибку в поправке первого порядка, обусловленную этой процедурой. Поскольку $\Delta^{(12)}J(\mu, \mu_0) = O(h^2 \ln h)$ имеет тот же порядок, что и главные по h члены поправки второго порядка теории возмущений $\Delta^{(2)}J(\mu, \mu_0)$, то $\Delta J^{(2)}(\mu, \mu_0)$ следует записать в виде

$$\Delta J^{(2)}(\mu, \mu_0) = \Delta^{(2)} J(\mu, \mu_0) + \Delta^{(12)} J(\mu, \mu_0). \tag{19}$$

Для $\Delta^{(2)}J(\mu, \mu_0)$ согласно ([1], (29)) и ([1], (15)) имеем

$$\Delta^{(2)} J(\mu, \mu_0) = \frac{\Lambda}{2\mu} \left\{ \int_0^\infty e^{-\tau/\mu} f^{(2)}(\tau, \mu_0)\, d\tau + \int_0^\infty Q(\tau)\, e^{-\tau/\mu} f^{(1)}(\tau, \mu_0)\, d\tau \right\}. \tag{20}$$

Здесь $f^{(1)}(\tau, \mu_0)$ и $f^{(2)}(\tau, \mu_0)$ соответствующие члены итерационного ряда ([1], (29)). Действуя, как и при переходе от (2) к (3), и положив для краткости $J_0 = 2\pi$, найдем

$$\frac{2\mu}{\Lambda} \Delta^{(2)} J = a^2 \iint_0^\infty [f^{(0)}(\tau_0, \mu_0) - e^{-\tau_0/\mu_0}]\, e^{-\frac{\tau_0+\tau_1}{h}} f^{(0)}(\tau_1, \mu)\, \Gamma(\tau_0 | \tau_1)\, d\tau_0 d\tau_1 +$$

$$+ a^2 \int_0^\infty e^{-\tau_0/h} f^{(0)}(\tau_0, \mu_0) [f^{(0)}(\tau_0, h^{(1)}(\mu)) - e^{-\tau_0/h^{(1)}(\mu)}]\, d\tau_0,$$

где

$$h^{(1)}(\mu) = h\mu/(h+\mu).$$

Ограничиваясь главными по h членами, используя свойства резольвенты и известное равенство [2, 3]

$$\int_0^\infty e^{-\tau/x} f^{(0)}(\tau, x')\, d\tau = \frac{\varphi(x)\varphi(x')}{x+x'} xx', \tag{21}$$

полагая

$$h(\mu, \mu_0) = h^{(1)}(\mu)\, h^{(1)}(\mu_0) / [h^{(1)}(\mu) + h^{(1)}(\mu_0)],$$

получим

$$\Delta^{(2)} J = \frac{\Lambda a^2}{2\mu} [\varphi(\mu_0) - \varphi(\mu) + \varphi(\mu_0)\varphi(\mu)][\varphi(h^{(1)}(\mu))\varphi(h^{(1)}(\mu_0)) - 1] h(\mu, \mu_0). \tag{22}$$

Интересно отметить, что при $\mu \ll h$ $\Delta^{(2)}J$ меняет порядок малости

$$\Delta^{(2)} J(0, \mu_0) = \frac{\Lambda a^2}{2} [2\varphi(\mu_0) - 1][\varphi(h^{(1)}(\mu_0)) - 1] = O(h \ln h).$$

Итак, для лучей, почти касательных к поверхности и в первом и во втором порядках, имеет место резкое увеличение поправки, хотя и в этом случае $\Delta^{(2)}J - O(h \ln h \cdot \Delta J^{(1)})$.

Для завершения вычисления $\Delta J^{(2)}$ остается найти величину $\Delta^{(12)}J(\mu, \mu_0)$, которую нетрудно привести к виду

$$\Delta^{(12)} J = -\frac{\Lambda a}{2\mu} \varphi(\mu_0) \int_0^\infty \Phi(\tau', \Lambda) e^{\tau/\mu_0} d\tau' \int_0^\infty e^{-\tau/h^{(1)}(\mu_0)} f^{(0)}(\tau, \mu) d\tau. \tag{23}$$

Ввиду того что $f^{(0)}(\tau, \mu)$ медленно убывающая (по сравнению с $e^{-\tau/h}$) функция, ее можно вынести из-под внутреннего интеграла. В результате найдем

$$\Delta^{(12)} J = -\frac{\Lambda a}{2\mu} \varphi(\mu_0) h^{(1)}(\mu_0) \int_0^\infty \Phi(\tau', \Lambda) e^{-\tau'/h} f^{(0)}(\tau', \mu) d\tau'.$$

Так как $\Phi(\tau|, \Lambda) = \Gamma(\tau | 0)$, то, действуя обычным образом, получим

$$\Delta^{(12)} J(\mu, \mu_0) = \frac{\Lambda a}{2\mu} \varphi(\mu)\varphi(\mu_0)[\varphi(h^{(1)}(\mu)) - 1] h^{(1)}(\mu_0). \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что при $\mu \gg h$ $\Delta^{(12)}J = O(h^2 \ln h)$, а при $\mu < h$ $\Delta^{(12)}J(\mu, \mu_0) = O(h \ln h)$. Отсюда, в частности, следует, что первая область дает вклад в поправку к коэффициенту отражения порядка $O(h^2 \ln h)$, а область малых μ из-за интегрирования по $\mu d\mu$ — вклад $O(h^3 \ln h)$. Поэтому сингулярность $\Delta^{(2)}J$ и $\Delta^{(12)}J$ при малых μ не существенна для вычисления поправок второго порядка к коэффициенту отражения, к которому мы и переходим.

Согласно (19), (22) и (24) $\Delta R^{(2)}$ распадается на два слагаемых, первое из которых пропорционально a^2, а второе a:

$$\Delta R^{(2)}(\mu_0, \Lambda) = \Delta^{(2)}R(\mu_0, \Lambda) + \Delta^{(12)}R(\mu_0, \Lambda). \tag{25}$$

Проводя вычисления согласно (12) с точностью до $O(h^2)$ и полагая в (22) и (24) $h^{(1)}(\mu) \approx h$, найдем

$$\Delta^{(2)} R(\mu_0, \Lambda) = \frac{a^2 h h^{(1)}(\mu_0)}{h + h^{(1)}(\mu_0)} \cdot \frac{\Lambda}{2} [\varphi(h)\varphi(h^{(1)}(\mu_0)) - 1][\varphi(\mu_0) + (\varphi(\mu_0) - 1)\alpha_0(\Lambda)] \tag{26}$$

и

$$\Delta^{(12)} R(\mu_0, \Lambda) = \frac{a\Lambda}{2} [\varphi(h) - 1] \varphi(\mu_0) h^{(1)}(\mu_0) \alpha_0(\Lambda). \tag{27}$$

При $\mu_0 \sim 1$ формулы (26), (27) упрощаются и полная поправка к коэффициенту отражения принимает вид

$$\Delta R^{(2)} = \frac{\Lambda a h}{2} [\varphi(h) - 1] \left\{ a \frac{\varphi(h) + 1}{2} [\varphi(\mu_0)(1 + \alpha_0) - \alpha_0] + \varphi(\mu_0)\alpha_0 \right\}. \tag{28}$$

Разумеется, при использовании (25)—(28) для поправок второго порядка поправку первого порядка следует считать по (14), а не по (15).

Высшие порядки теории возмущений

Для исследования зависимости $J(\mu, \mu_0)$ от концентрации центров «нового» типа в неоднородности, т. е. в конечном счете от a, могут понадобиться поправки высших порядков теории возмущений. Используя технику, развитую выше, рассмотрим весь ряд теории возмущений, ограничиваясь главными по h членами в множителях при степенях a. Обозначим $\Delta f(\tau) \equiv f(\tau, \mu_0) - f^{(0)}(\tau, \mu_0)$ и опять положим $I_0 = 2\pi$, тогда в указанных предположениях ряд теории возмущений ([1], (29)) для $Q(\tau)$ в форме (8) приводится к виду

$$\Delta f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^n [f^{(0)}(\tau, h^{(n-1)}) - e^{-\tau/h^{(n-1)}}] \prod_{m=1}^{n} [\varphi(h^{(m-2)}) - 1], \quad (29)$$

где для $n = 0, 1, 2, \ldots$ мы обозначили

$$h^{(n)}(\mu_0) = \frac{h\mu_0}{h + \mu_0 n}; \quad h^{(n)} \sim \frac{h}{n} \quad \text{при} \quad \mu_0 = 1 \quad (30)$$

и положили формально $\varphi(h^{(-1)}) \equiv 2$.

Формула (29) вскрывает две интересные черты ряда теории возмущений ([1], (29)), которые качественно можно ожидать из общих физических представлений (точнее, из факта точного учета в ([1], (29)) рассеяния вне неоднородности). С ростом порядка n, во-первых, постепенно исчезает информация о начальном угле падения $\arccos \mu_0$ и, во-вторых, каждый последующий член ряда описывает изменение $f(\tau, \mu)$ во все более сужающейся области τ, так как h переходит в h/n. Иначе, можно сказать, что для любого заданного μ_0 область неоднородности станет пренебрежимо узкой.

Переходя к интенсивности выходящего излучения, запишем ее в форме $\Delta J = J - J^{(0)}$ и

$$\Delta J = -a \int_0^{\infty} e^{-\tau/h^{(1)}(\mu)} f^{(0)}(\tau, \mu_0)\, d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\tau/\mu} (1 - a e^{-\tau/h}) \Delta f(\tau)\, d\tau. \quad (31)$$

Первый интеграл вычисляется элементарно по (21), обозначая второй интеграл в (31) через ΔJ_0, имеем $\Delta J_0 = \Delta J_1 - a\Delta J_2$, причем ΔJ_2 получается из ΔJ_1 путем замены $\mu \to h^{(1)}(\mu)$. Положим $A_n(\mu_0)$ равным n-кратному произведению в (29), тогда ΔJ_1 можно записать в виде

$$\Delta J_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n A_n(\mu_0) \int_0^{\infty} [f^{(0)}(\tau, h^{(n-1)}) - e^{-\tau/h^{(n-1)}}] e^{-\tau/\mu}\, d\tau. \quad (32)$$

Откуда с учетом (21) находим

$$\Delta J_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n A_n(\mu_0) \frac{\mu h^{(n-1)}(\mu_0)}{\mu + h^{(n-1)}(\mu_0)} [\varphi(\mu)\varphi(h^{(n-1)}) - 1]. \quad (33)$$

Аналогично

$$\Delta J_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n A_n(\mu_0) \frac{h^{(1)}(\mu) h^{(n-1)}(\mu_0)}{h^{(1)}(\mu) + h^{(n-1)}(\mu_0)} [\varphi(h^{(1)}(\mu))\varphi(h^{(n-1)}(\mu_0)) - 1]. \quad (34)$$

Если, наконец, воспользоваться асимптотикой функции Амбарцумяна при $\mu \to 0$ $\varphi(\mu) \approx 1 - \frac{\Lambda}{2} \mu \ln \mu$ и считать $\mu\mu_0 \sim 1$, то для ΔJ_1 и ΔJ_2 получим окончательно

$$\Delta J_1 = [1 - \varphi(\mu)] \left\{ ha + \frac{2}{\Lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a\Lambda h)^n}{2^n n!} \prod_{m=2}^{n} \ln\left(\frac{h}{m-1}\right) \right\} \tag{35}$$

и

$$\Delta J_2 = [1 - \varphi(h^{(1)}(\mu))] \left\{ ha + \frac{2}{\Lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a\Lambda h)^n \cdot n}{2^n (n+1)!} \prod_{m=2}^{n} \ln\left(\frac{h}{m-1}\right) \right\}. \tag{36}$$

Ряды в (35) и (36) имеют уже достаточно простую структуру и могут быть приближенно просуммированы в связи с более конкретными задачами.

В заключение отметим, что развитый в данной и предыдущей работе формализм может быть применен для модельного учета шероховатости поверхности светорассеивающей среды, если последнюю описывать как тонкий слой с оптическими характеристиками, отличными от характеристик внутри среды. Общий вывод о доминирующем влиянии такой «неоднородности» на интенсивность при малых μ, μ_0 во всех порядках теории возмущений остается справедливым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черняк Ю. Б., Луничев В. Н., Соловьев Г. Г. «Вестник Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1977, 18, № 1.
2. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., 1956.
3. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М., 1969.
4. Амбарцумян В. А. «Астрономический журнал», 1942, 19, 30.
5. Halpern O., Luneburg R. K., Clark O. «Phys. Rev.», 1938, 53, 173.

Поступила в редакцию
30.12 1975 г.
НИИЯФ