УДК 536.7 : 536.421

А. А. Померанцев

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОПЛАВЛЕНИЯ ТЕЛ

Разработан метод решения одномерной задачи теплопроводности с *движущимися* граничными условиями: затвердевания и оплавления материала. В результате преобразования переменных предложенная задача сведена к задаче с *покоящимися* граничными условиями. Даны решения задачи.

Две задачи теплофизики: 1) остывания расплавленного материала с последующим затвердением и 2) прогревание твердого материала с последующим оплавлением его — стали в настоящее время предметом многочисленных исследований. Обе задачи были порождены запросами тяжелой индустрии. Одним из первых, кто занялся в 1930 г. первой задачей, был английский металлург Лайтфут [1].

Для этих задач характерным является необходимость формулировки граничных условий на движущихся поверхностях. В настоящей статье дается решение, основанное на преобразованиях, сводящих задачу с движущимися граничными условиями к задаче с покоящимися граничными условиями.

Наиболее просто выглядит решение первой задачи. Запишем уравнение одномерного остывания до начала затвердевания

$$T = T_{\text{распр}} \cdot \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \tag{1}$$

где

$$a^2 = \frac{\Lambda}{c_p \rho}, \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z'^2} dz',$$

Λ — коэффициент теплопроводности, c_p — теплоемкость, ρ — плотность материала. Оно удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

([2], § 18, стр. 42—46), а также начальному и граничному условиям остывания:

при $t=0$ и $x \neq 0$, $T=T_{\text{распл}}$; при $x=0$, $T=0$.

Решение применимо до начала затвердевания материала. После начала затвердевания необходимо использовать новые методы расчета (см. [2, 3], а также [4]). Ниже приведены расчеты автора.

Решение задачи одномерного *прогревания* до начала оплавления выглядит следующим образом:

$$T = T_{\text{печь}} \cdot \Phi^*\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

где

$$\Phi^*(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_z^\infty e^{-z'^2} dz', \quad \Phi^*(z)$$

есть интеграл вероятности второго рода, выражаемый через интервал вероятности первого рода $\Phi^*(z) \equiv 1 - \Phi(z)$.

Решение удовлетворяет уравнению теплопроводности [4, 5], а также начальному и граничному условиям:

при $t=0$, $x \neq 0$, $T=0$; при $x=0$, $T=T_{\text{печь}}$.

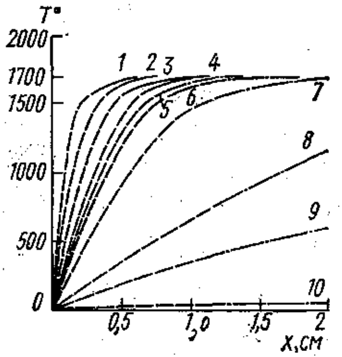

Рис. 1. Остывание затвердевшего материала. $T_{\text{распл}} = 1700°$С, температура холодильника $T_0 = 0°$С: *1* — 0,1; *2* — 0,2; *3* — 0,4; *4* — 0,6; *5* — 0,8; *6* — 1,0; *7* — 2,0; *8* — 16; *9* — 60; *10* — 900

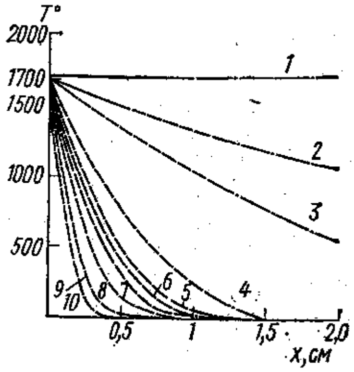

Рис. 2. Прогревание твердого материала печью: $T_{\text{печь}} = 1700°$С. Обозначения те же, что на рис. 1

Решение применимо до начала *оплавления*. После начала его к расчету задачи должны быть применены упомянутые в [2] или [3] методы.

На рис. 1 и 2 приведены распределения температур $T = T_{\text{распл}} \cdot \Phi(z)$ $T = T_{\text{печь}} \cdot \Phi^*(z)$, а также ход зависимости переменной x от времени t и параметра z.

Для преодоления основной трудности задачи — изменения во времени ее граничного условия — передвижения фронтов затвердевания и оплавления автором предложен аналитический прием, состоящий в передвижении затвердевающего или оплавляемого материала в направлении, противоположном перемещению фронтов. В результате такого преобразования фронта затвердевания или оплавления делаются условно неподвижными. Следует отметить, что такая операция оказывается законной только для полуограниченного тела. Перемещение тела создает передвижение в нем бесконечно удаленной границы, но тепловое действие ее не сказывается заметным образом на затвердевании или оплавлении. Поэтому передвижением границы на бесконечно большом удалении ее можно пренебречь.

Ландау [3] применил более общее преобразование переменных к задаче оплавления стенки конечной толщины (см. [2]). Сандерс [6] использовал [3] в расчете стержня короткой длины.

Преобразование граничного условия видоизменяет уравнение теплообмена. Уравнение теплопроводности становится уравнением конвекции

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \dot{\xi} \frac{\partial T}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где $\dot{\xi}$ — скорость передвижения фронта, $a^2 \equiv \frac{\Lambda}{c_p \rho}$

Уравнение (2) легко интегрируется. Решение его получается из решения уравнения теплопроводности преобразованием переменных, подобным преобразованию граничного условия.

Для нерасплавленного материала $x \geqslant \xi$ решение уравнения (2) принимает вид

$$T = T_{пл} \cdot \Phi^* \left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} \right), \tag{3}$$

$\Phi^*(z)$ — интеграл вероятности второго рода:

$$\Phi^*(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z'^2} dz.$$

Для расплавленного материала $x \geqslant \xi$ уравнение (2) должно быть использовано с другими значениями физических параметров

$$a_1^2 \equiv \frac{\Lambda}{c_p \rho}.$$

Общее решение уравнения (2) в данном случае представляется бесконечными суммами частных решений вида

$$T^{(1)} = T_{печь} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Phi^* \left[\frac{2(k-1)\xi - x}{2a_1\sqrt{t}} \right] - \Phi^* \left[\frac{2k\xi + x}{2a_1\sqrt{t}} \right] \right\}, \tag{4}$$

$$T^{(2)} = T_{пл} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Phi^* \left[\frac{(2n-1)\xi - x}{2a_1\sqrt{t}} \right] - \Phi^* \left[\frac{(2n-1)+x}{2a_1\sqrt{t}} \right] \right\}. \tag{5}$$

Начальная температура принята равномерной и равной нулю. Ряды (4) и (5) являются обобщениями ряда Карслоу ([5] § 100, с. 231—233, формулы (3)). Ряды удовлетворяют уравнению (2), а также граничным и начальному условиям, и поэтому могут рассматриваться как общее решение данной задачи ($T_{печь}$ — температура печи, $T_{пл}$ — температура плавления материала).

Для нахождения скорости передвижения фронтов затвердевания и плавления ξ следует рассмотреть уравнение баланса тепловой энергии

$$r\rho \frac{d\xi}{dt} = \Lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \Lambda_1 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x}\bigg|_{x=\xi}, \tag{6}$$

r — теплота плавления материала, ρ — его плотность, Λ_1 — теплопроводность *расплавленного* материала, $T^{(1,2)}$ — распределение температур в конечной расплавленной части материала (4) и (5).

По формулам (4) и (5) находятся тепловые потоки

$$\Lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \Lambda_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T_{печь}}{2a_1\sqrt{t}} \left\{ 1 + 2\sum_1^\infty e^{-\left(\frac{k\xi}{a_1\sqrt{t}}\right)^2} \right\},$$

$\Lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x}\Big|_{x=0}$ — подвод тепла от печи в расплавленную часть материала,

$$\Lambda_1 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} = -\Lambda_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T_{пл}}{2a_1\sqrt{t}} \left\{ 1 + 2\sum_1^\infty e^{-\left(\frac{n\xi}{a\sqrt{t}}\right)^2} \right\},$$

$\Lambda_1 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x}\Big|_{x=\xi}$ — отвод тепла из расплавленного материала.

Преобразуем уравнение баланса (6):

$$r\rho\,\frac{d\xi}{dt}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\;\frac{\Lambda_1(T_{\text{печь}}-T_{\text{пл}})}{2a_1\sqrt{t}}\left\{1+2\sum_1^{\infty}e^{-\left(\frac{n\xi}{a_1\sqrt{t}}\right)^2}\right\}. \qquad (7)$$

Получаем

$$\frac{r\rho a_1^2}{\Lambda_1(T_{\text{печь}}-T_{\text{пл}})}\;\frac{\sqrt{t}}{a_1}\;\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{1+2\sum_1^{\infty}e^{-\left(\frac{n\xi}{a_1\sqrt{t}}\right)^2}\right\}. \qquad (8)$$

Преобразуем уравнение (8)

$$O_{\text{пл}}\,\frac{d\xi}{d\tau}=1+2\sum_1^{\infty}e^{-\left(2\frac{n\xi}{\tau}\right)^2}, \qquad (9)$$

вводя новые параметры и переменное

$$O_{\text{пл}}\equiv\frac{r\rho a_1^2}{\Lambda_1(T_{\text{печь}}-T_{\text{пл}})}\sqrt{\pi_0}\quad \tau\equiv 2a_1\sqrt{t}.$$

Разделяем переменные в (9) с помощью преобразований

$$\frac{\xi}{\tau}\equiv\eta,\quad d\xi\equiv\tau d\eta+\eta d\tau$$

и получаем

$$O_{\text{пл}}\tau\,\frac{d\eta}{d\tau}+\eta=1+2\sum_1^{\infty}e^{-(2n\eta)^2}, \qquad (10)$$

$O_{\text{пл}}=2{,}865$ для стали.

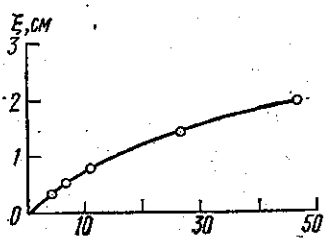

Рис. 3. Ход во времени t оплавления и затвердевания ξ стальных изделий

Вводя переменные

$$\frac{\tau}{d\tau}\equiv\frac{1}{d\ln\tau}\equiv\frac{1}{d\varepsilon},\quad \varepsilon\equiv\ln\tau,$$

переходим к уравнению

$$O'_{\text{пл}}\,d\varepsilon\;\frac{d\eta}{1+2\sum\limits_1^{\infty}e^{-(2n\eta)^2}-O_{\text{пл}}\eta},$$

$$O'_{\text{пл}}\equiv\frac{1}{O_{\text{пл}}}=0{,}349 \text{ для стали.} \qquad (11)$$

Нахождение скорости перемещения фронтов затвердевания и оплавления тела

η	$1+2e^{-2\eta^2}$	$O_{\text{пл}}\cdot\eta$	(2)—(3)	$\frac{d\eta}{(4)}$	$d\xi= =5\cdot O_{\text{пл}}$	$\tau=e^{(6)}$	$\xi\equiv\eta\tau$	$\sqrt{t}$, $c^{1/2}$	t, c	$\xi\equiv\frac{(8)}{(10)}$, см/с
0,25	2,556	0,717	1,849	0,135	0,387	1,472	0,368	2,16	4,66	0,788
0,30	2,395	0,86	1,535	0,1955	0,560	1,750	0,526	2,56	6,55	0,798
0,35	2,225	1,00	1,225	0,2860	0,820	2,2705	0,795	3,32	11,0	0,0722
0,40	2,055	1,145	0,910	0,440	1,260	3,525	1,41	5,15	26,6	0,053
0,42	1,9882	1,205	0,7832	0,537	1,540	4,665	1,96	6,84	46,6	0,042
0,45	1,8896	1,290	0,5996	0,752	2,155	8,628	3,88	12,62	159	0,0244
0,50	1,636	1,432	0,204	2,45	7,00	1,097	$0{,}548\cdot10^3$	$1{,}805\cdot10^3$	$2{,}89\cdot10^6$	$0{,}19\cdot10^{-3}$

Выполняем численное интегрирование по средним значениям параметров стали в пределах температур 0—1700°C. Расчет задачи применяющихся значениях параметров стали должен составить новую специальную задачу.

Результаты интегрирования (для стали) представлены на рис. 3 и в таблице.

Настоящая работа докладывалась в апреле 1976 г. на Ломоносовских чтениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lightfoot N. M. The solidification of molten steel. Proc. London Math. Society, 1930, 31, 97—116.
2. Померанцев А. А. В сб.: К теории оплавления и обгорания тела. Задача Стефана, т. 3, 1963, с. 185—194.
3. Landau H. G. «J. Appl. Math.», 1950, 8, N 1, 81—94.
4. Карслоу Х., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964.
5. Карслоу Х. Теория теплопроводности. М., 1947.
6. Sanders R. W. An Exact Sol. ARS Jour., 1960.

Поступила в редакцию
24.6 1976 г.
Кафедра
молекулярной физики