

УДК 521.401

В. М. Чепурова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ НЕУГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГИПЕР-
БОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ

В статье выводятся дифференциальные уравнения для неугловых элементов (большой полуоси, эксцентриситета и синуса наклонности) гиперболической промежуточной орбиты материальной точки, движущейся в поле тяготения сжатой планеты и возмущаемой другой планетой. Промежуточная орбита основана на симметричном варианте задачи двух неподвижных центров. В качестве возмущающей функции берется хилловский член разложения потенциала возмущающей планеты с учетом эллиптичности ее движения. Правые части уравнений представляются в виде тригонометрических рядов, в качестве аргументов в которых берутся комбинации угловых элементов промежуточного движения материальной точки и угловых элементов возмущающего тела, а амплитуды зависят от неугловых элементов обоих и являются рядами по степеням малого параметра задачи двух неподвижных центров.

В статье [1] были выведены дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов $\hat{a}$, $\hat{e}$, $\hat{s}$, ω , Ω , M и параметра орбиты p [2, 3] гиперболической траектории в симметричном варианте задачи двух неподвижных центров [4]. Первые элементы $\hat{a}$, $\hat{e}$, $\hat{s}$ и p условно названы в [1] неугловыми. Дифференциальные уравнения для них в общем виде записываются следующим образом [1]:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \hat{a}[1 + 3\hat{e}^2(\hat{e}^2 - 1)(1 - \hat{s}^2)] + \hat{e} \cdot 10\hat{e}^2\hat{a}\hat{e}(1 - \hat{s}^2) - 2\hat{s}\hat{e}^2\hat{a}\hat{s}(\hat{e}^2 - 1),$$

$$e \frac{d\hat{e}}{dt} = -\frac{\hat{a}}{\hat{a}} \hat{e}^2(\hat{e}^2 - 1)(3\hat{e}^2 + 1)(1 - \hat{s}^2) + \hat{e}\hat{e}[1 - \hat{e}^2 12\hat{e}^2(1 - \hat{s}^2)] + \hat{s}\hat{e}^2\hat{s}(\hat{e}^2 - 1)(3\hat{e}^2 + 1),$$

$$s \frac{d\hat{s}}{dt} = -\frac{\hat{a}}{\hat{a}} \hat{e}^2\hat{s}^2(1 - \hat{s}^2)(\hat{e}^2 - 1) - \hat{e} 3\hat{e}^2\hat{s}^2(1 - \hat{s}^2)\hat{e} + \hat{s}\hat{s}[1 - \hat{e}^2(\hat{e}^2 - 1)], \quad (1)$$

$$\text{и} \quad \frac{dp}{dt} = \hat{p}[1 - 6\hat{e}^2\hat{a}^2(\hat{e}^2 + 1)] - 4\hat{s}\hat{e}^2\hat{a}\hat{s}(\hat{e}^2 - 1),$$

где в правых частях используются выражения для производных величин $\hat{a}$, $\hat{e}$, $\hat{s}$. Дифференциальные уравнения для этих величин, разрешенные относительно первых производных, имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} &= 2\hat{a}^3 (\dot{x}F'_x + \dot{y}F'_y + \dot{z}F'_z), \\ \dot{\hat{e}} &= F'_x \cdot [x] + F'_y \cdot [y] + F'_z \cdot [z], \\ \dot{\hat{s}} &= \frac{1 - \hat{s}^2}{\hat{s}\hat{p}} \{F'_x[x'] + F'_y[y'] + F'_z[z']\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$F'_q = \frac{1}{fm} \cdot \frac{\partial R}{\partial q}, \quad (q = x, y, z),$$

R — возмущающая функция,

$$[x] = \frac{\hat{p}}{\hat{e}} \dot{x} - \frac{1}{\hat{a}\hat{e}} r (\dot{x}r - x\dot{r}),$$

$$[y] = \frac{\hat{p}}{\hat{e}} \dot{y} - \frac{1}{\hat{a}\hat{e}} r (\dot{y}r - y\dot{r}),$$

$$[z] = \frac{\hat{a}\hat{p} - c^2}{\hat{a}\hat{e}} \dot{z} - \frac{1}{\hat{a}\hat{e}} r (\dot{z}r - z\dot{r}),$$

$$[x'] = r (\dot{x}r - x\dot{r}) - \frac{y}{1-s^2} (\dot{x}y - xy\dot{r}),$$

$$[y'] = r (\dot{y}r - y\dot{r}) + \frac{x}{1-s^2} (\dot{x}y - xy\dot{r}),$$

$$[z'] = r (\dot{z}r - z\dot{r}) - c^2 \dot{z};$$

f — постоянная тяготения, m — масса центрального тела, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — радиус-вектор, а x, y, z (q) — координаты движущейся по гиперболической орбите точки, t — время, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, c — постоянная задачи двух неподвижных центров [4], $a^2 = 1 - s^2$.

Возьмем возмущающую функцию R в виде

$$R = \frac{fm'}{r'} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r'} \right)^2 (3 \cos^2 H - 1) \right], \quad \cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}, \quad (3)$$

т. е. возмущение производится телом массы m' с координатами q' : x', y', z' ; $r' = \frac{a'(1-e'^2)}{1+e'\cos v'}$ — радиус-вектор возмущающего тела, т. е. тело движется по кеплеровскому эллипсу с элементами последнего $a', e', i', \omega', \Omega', M'$; $\alpha' = \cos i'$, $s' = \sin i'$; $v' = u' - \omega'$ — истинная аномалия возмущающего тела. Напомним, что возмущаемая точка движется по гиперболе с оскулирующими элементами $a, e, s, \omega, \Omega, M$ — некеплеровскими.

В прямоугольной системе координат, связанной с центральным осесимметричным сжатым телом так, что начало координат совпадает с центром масс, ось Oz направлена по оси вращения, ось Ox направлена в точку пересечения экватора тела с эклиптической, плоскость XY — экваториальная, координаты движущейся в поле притяжения центрального тела точки и возмущающего ее движения тела массы m' через элементы их орбит могут быть записаны следующим образом:

$$x = r\tilde{\alpha}, \quad x' = r'\tilde{\alpha}',$$

$$y = r\tilde{\beta}, \quad y' = r'\tilde{\beta}',$$

$$z = r\tilde{\gamma}, \quad z' = r'\tilde{\gamma}';$$

где

$$\tilde{\alpha} = -\sin \varphi \sin \Omega + \alpha \cos \varphi \cos \Omega,$$

$$\tilde{\beta} = \sin \varphi \cos \Omega + \alpha \cos \varphi \sin \Omega,$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\xi}{r} s \cos \varphi,$$

$$\xi = \frac{a(1-e^2)}{1+\bar{e}\cos\psi} [1 - e^2e^2(1-2s^2) + \cos\psi e^2e^2(1-2s^2)],$$

$$\bar{e} = e[1 - e^2(e^2 - 1)(1 - 2s^2)];$$

ψ — аналог истинной аномалии; ε — малый параметр задачи двух неподвижных центров, $\varphi = u + \bar{\omega}(\psi)$, $u = \psi + \omega$, [1, 3],

$$\tilde{\alpha}' = \cos u' \cos \Omega' - \alpha' \sin u' \sin \Omega',$$

$$\tilde{\beta}' = \cos u' \sin \Omega' + \alpha' \sin u' \cos \Omega',$$

$$\tilde{\gamma}' = s' \sin u'.$$

Введем обозначения:

$$(rr) = \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z},$$

$$(rr') = \dot{x}\dot{x}' + \dot{y}\dot{y}' + \dot{z}\dot{z}',$$

$$(\dot{r}\dot{r}') = \dot{x}\dot{x}' + \dot{y}\dot{y}' + \dot{z}\dot{z}',$$

$$[rrr'] = (\dot{x}\dot{y} - \dot{x}'\dot{y}')(\dot{x}\dot{y}' - \dot{x}'\dot{y}) + (\dot{y}\dot{z} - \dot{y}'\dot{z}')(\dot{y}\dot{z}' - \dot{y}'\dot{z}) + (\dot{z}\dot{x} - \dot{z}'\dot{x}')(\dot{z}\dot{x}' - \dot{z}'\dot{x}).$$

В этих обозначениях возмущающая функция R (3) и ее производные по координатам возмущаемой точки F_a (2) могут быть после некоторых преобразований записаны таким образом, что уравнения (2) для величин $\hat{a}$, $\hat{e}$, $\hat{s}$ и $\hat{p}$ примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{2\hat{a}^2}{r'^3} \{3(rr')(\dot{r}\dot{r}') - r'^2(\dot{r}\dot{r}')\}, \\ \frac{d\hat{e}}{dt} &= \frac{1}{\hat{a}\hat{e}r'^3} \{r'^2[c^2\dot{z}\dot{z}' - \hat{a}\hat{p}(\dot{r}\dot{r}')] - 3(rr')[c^2\dot{z}\dot{z}' - \hat{a}\hat{p}(\dot{r}\dot{r}')] + 3(rr')[rrr']\}, \\ \frac{d\hat{s}}{dt} &= \frac{1 - \hat{s}^2}{\hat{p}\hat{s}r'^3} \left\{ c^2\dot{z}\dot{z}'r'^2 - 3(rr')c^2\dot{z}\dot{z}' - \frac{3}{\hat{a}^2}(rr')(\dot{x}\dot{y} - \dot{x}'\dot{y}') \times \right. \\ &\quad \left. \times (\dot{x}\dot{y}' - \dot{x}'\dot{y}) + 3(rr')[rrr'] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

и

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{1}{r'^3} \{6c^2\dot{z}\dot{z}'(rr') - 2c^2\dot{z}\dot{z}'r'^2 - 6(rr')[rrr']\}.$$

Ограничиваясь, как и раньше [1], точностью до ε^2 , после достаточно громоздких преобразований правые части уравнений (4) можно записать в виде тригонометрических рядов с аргументами ψ , ψ' , ω , ω' , Ω , Ω' , из которых первые два непосредственно связаны со временем, ибо являются истинными аномалиями возмущаемой точки и возмущающего тела, и коэффициентами при тригонометрических функциях, зависящими от неугловых элементов a , a' , e , e' , s , s' и ε , т. е. уравнения (4) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= L_{\hat{a}} \sum_{\substack{k,l,m \\ i,j}} \{ \hat{a} A_{2l,j}^{2k,2l,m} \sin [2k(\Omega' - \Omega) \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi'] + \\ &\quad + \hat{a} B_{2l,j}^{1,2l,m} \cos (\Omega' - \Omega \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi') \}, \\ \frac{d\hat{e}}{dt} &= L_{\hat{e}} \sum_{\substack{k,l,m \\ i,j}} \{ \hat{e} A_{2l,j}^{2k,2l,m} \sin [2k(\Omega' - \Omega) \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi'] + \\ &\quad + \hat{e} B_{2l,j}^{1,2l,m} \cos (\Omega' - \Omega \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi') \}, \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{s}}{dt} = L_{\hat{s}} \sum_{\substack{k,l,m \\ i,j}} \{ \hat{s} A_{2i,j}^{2k,2l,m} \sin [2k(\Omega' - \Omega) \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\nu'] + \\ + \hat{s} B_{2i,j}^{1,2l,m} \cos (\Omega' - \Omega \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\nu') \}$$

и

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = L_{\hat{p}} \sum_{\substack{k,l,m \\ i,j}} \{ \hat{p} A_{2i,j}^{2k,2l,m} \sin [2k(\Omega' - \Omega) \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\nu'] + \\ + \hat{p} B_{2i,j}^{1,2l,m} \cos (\Omega' - \Omega \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\nu') \}. \quad (5)$$

Здесь индексы k, l, m, i, j принимают следующие значения:

$$k = 0, 1; l = 0, 1; m = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;$$

коэффициенты при суммах — $L_{\hat{a}}, L_{\hat{e}}, L_{\hat{s}}, L_{\hat{p}}$ — выражаются формулами

$$L_{\hat{a}} = \frac{a^2 \sqrt{e^2 - 1} n}{16a'^3 (1 - e'^2)^3} \frac{2\hat{a}^2}{1 + \bar{e} \cos \psi}, \\ L_{\hat{e}} = \frac{a^2 \sqrt{e^2 - 1} n}{64a'^3 (1 - e'^2)^3} \frac{\hat{a}(\hat{e}^2 - 1)}{\hat{e}(1 + \bar{e} \cos \psi)^2}, \\ L_{\hat{s}} = \frac{a^2 \sqrt{e^2 - 1} n}{64a'^3 (1 - e'^2)^3} \frac{a^2 (e^2 - 1)^2}{\hat{p} \hat{s} (1 + \bar{e} \cos \psi)^2} \quad (6)$$

и

$$L_{\hat{p}} = - \frac{a^2 \sqrt{e^2 - 1} n}{32a'^3 (1 - e'^2)^3} \frac{a^2 (e^2 - 1)^2}{(1 + \bar{e} \cos \psi)^3}.$$

Выписать все коэффициенты при тригонометрических функциях внутри сумм не представляется возможным из-за их громоздкости (у автора имеются формулы, где выписаны все эти коэффициенты с принятой точностью до ε^2). Для того чтобы можно было себе представить вид этих коэффициентов, ниже приведены некоторые коэффициенты, а именно коэффициенты при постоянных — не связанных непосредственно со временем — членах для всех уравнений (5):

$$\hat{e} A_{20}^{000} = -2(2 - 3s'^2)(3e'^2 + 2)s^2 e^2 \left\{ 3 - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon^2}{8} [74e^2 - 104 - 3s^2(43e^2 - 53)] \right\},$$

$$\hat{e} A_{\pm 20}^{020} = \mp \frac{9}{2} s'^3 e'^2 s^2 e^2 \left\{ 3 - \frac{\varepsilon^2}{8} [74e^2 - 104 - 3s^2(43e^2 - 53)] \right\};$$

$$\hat{e} B_{00}^{100} = \frac{3}{2} \varepsilon^2 \alpha' s' (3e'^2 + 2) s [8(e^4 + e^2 - 2) - s^2(9e^4 - 12e^2 - 32)],$$

$$\hat{e} B_{\pm 20}^{100} = -12\alpha' s' (3e'^2 + 2) (1 \mp \alpha) s e^2 \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} [18e^2 - 11 \pm \alpha(e^2 + 6) - \alpha^2(43e^2 - 53)] \right\},$$

$$\hat{e} B_{00}^{1\pm 20} = \mp \frac{9}{8} \varepsilon^2 (1 \pm \alpha') s' e'^2 s [8(e^4 + e^2 - 2) - s^2(9e^4 - 12e^2 - 32)],$$

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{\pm 20}^{1+20} &= \pm 9(1 + \alpha') s' e'^2 (1 \mp \alpha) s e^2 \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [18e^2 - 11 \pm \alpha(e^2 + 6) - \alpha^2(43e^2 - 53)] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее разные знаки в коэффициентах относятся к разным знакам при аргументах, например коэффициенты $A_{\pm 20}^{2+20}$ и $B_{\pm 20}^{1+20}$ стоят при функциях $\sin 2(\Omega' - \Omega \pm \omega' \pm \omega)$ и $\cos(\Omega' - \Omega \pm 2\omega' \pm 2\omega)$.

$$\widehat{A}_{00}^{200} = -\frac{3}{4} e^2 s'^2 (3e'^2 + 2) s^2 \alpha (9e^4 - 12e^2 - 32),$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{\pm 20}^{200} &= \pm 3s'^2 (3e'^2 + 2) (1 \mp \alpha)^2 e^2 \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [17e^2 + 11 \pm 2\alpha(e^2 + 6) - \alpha^2(43e^2 - 53)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\widehat{A}_{00}^{2\pm 20} = -\frac{9e^2}{16} (1 \pm \alpha')^2 e'^2 s^2 \alpha (9e^4 - 12e^2 - 32),$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{\pm 20}^{2\pm 20} &= \pm \frac{9}{4} (1 + \alpha')^2 e'^2 (1 \mp \alpha)^2 e^2 \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [17e^2 + 11 \pm 2\alpha(e^2 + 6) - \alpha^2(43e^2 + 53)] \right\}; \end{aligned}$$

$$\widehat{s}A_{20}^{000} = e^2 (2 - 3s'^2) (3e'^2 + 2) s^2 \alpha^2 (2 - 3s^2) e^2,$$

$$\widehat{s}A_{\pm 20}^{020} = \pm \frac{9}{4} e^2 s'^2 e'^2 s^2 (2 - 3s^2) \alpha^2 e^2,$$

$$\widehat{s}A_{00}^{200} = 3s'^2 (3e'^2 + 2) s^2 \alpha \left\{ 4 + \frac{e^2}{2} [25e^2 + 12 - \alpha^2(45e^2 - 20)] \right\},$$

$$\widehat{s}A_{\pm 20}^{200} = -\frac{3}{4} e^2 s'^2 (3e'^2 + 2) \alpha (1 \mp \alpha)^2 (1 \pm \alpha) (5 \mp \alpha + 2\alpha^2) e^2,$$

$$\widehat{s}A_{00}^{2\pm 20} = \frac{9}{4} (1 \pm \alpha')^2 e'^2 \alpha s^2 \left\{ 4 + \frac{e^2}{2} [25e^2 + 12 - \alpha^2(45e^2 - 20)] \right\},$$

$$\widehat{s}A_{\pm 20}^{2\pm 20} = -\frac{9e^2}{16} (1 + \alpha')^2 e'^2 \alpha (1 \mp \alpha)^2 (1 \pm \alpha) (5 \mp \alpha + 2\alpha^2) e^2;$$

$$\widehat{s}B_{00}^{100} = -2\alpha' (3e'^2 + 2) \alpha^2 \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [23e^2 + 8 - 5\alpha^2(9e^2 - 4)] \right\},$$

$$\widehat{s}B_{\pm 20}^{100} = \pm \frac{e^2}{8} \alpha' (3e'^2 + 2) \alpha (1 \mp \alpha) (3 \pm \alpha + \alpha^2 \pm 4\alpha^3) e^2,$$

$$\widehat{s}B_{00}^{1\pm 20} = \pm \frac{3}{2} (1 \pm \alpha') e'^2 \alpha^2 \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [23e^2 + 8 - 5\alpha^2(9e^2 - 4)] \right\},$$

$$\widehat{s}B_{\pm 20}^{1+20} = \mp \frac{3e^2}{32} (1 + \alpha') e'^2 \alpha (1 \mp \alpha) (3 \pm \alpha + \alpha^2 \pm 4\alpha^3) e^2;$$

$$\widehat{p}A_{20}^{000} = e^2 (2 - 3s'^2) (3e'^2 + 2) s^2 (2 - 3s^2) e^2,$$

$$\widehat{p}A_{\pm 20}^{020} = \pm \frac{9}{4} e^2 s'^2 e'^2 s^2 (2 - 3s^2) e^2,$$

$$\widehat{p}A_{00}^{200} = -9e^2 s'^2 (3e'^2 + 2) s^2 \alpha (e^2 + 2),$$

$$\begin{aligned}
 \hat{p} A_{\pm 20}^{200} &= \mp \frac{3}{2} \varepsilon^2 s'^2 (3e'^2 + 2) (1 \mp \alpha)^2 (1 + \alpha^2) e^2, \\
 \hat{p} A_{00}^{2\pm 20} &= -\frac{27}{4} \varepsilon^2 (1 \pm \alpha')^2 e'^2 s'^2 \alpha (e^2 + 2), \\
 \hat{p} A_{\pm 20}^{2+20} &= \mp \frac{9}{8} \varepsilon^2 (1 + \alpha')^2 e'^2 (1 \mp \alpha)^2 (1 + \alpha^2) e^2; \\
 \hat{p} B_{00}^{100} &= \frac{\varepsilon^2}{2} \alpha' (3e'^2 + 2) (2 - 3s^2) (e^2 + 2), \\
 \hat{p} B_{\pm 20}^{100} &= \frac{\varepsilon^2}{2} \alpha' (3e'^2 + 2) \alpha^2 (1 \mp \alpha) e^2, \\
 \hat{p} B_{00}^{1\pm 20} &= \mp \frac{3}{8} \varepsilon^2 (1 \pm \alpha') e'^2 (2 - 3s^2) (e^2 + 2), \\
 \hat{p} B_{\pm 20}^{1+20} &= \mp \frac{3}{8} \varepsilon^2 (1 + \alpha') e'^2 (1 \mp \alpha) \alpha^2 e^2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Выписав в явном виде уравнения (5) для $\hat{a}$, $\hat{e}$, $\hat{s}$ и $\hat{p}$ (последнее может служить контролем в выкладках и вычислениях) и подставляя необходимые выражения в правые части уравнений (1), получим для неугловых элементов a , e , s и p уравнения в виде, аналогичном (5):

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= L_a \sum_{\substack{k,l,m \\ i,j}} \{ a A_{2i,j}^{2k,2l,m} \sin [2k(\Omega' - \Omega) \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi'] + \\
 &\quad + a B_{2i,j}^{1,2l,m} \cos (\Omega' - \Omega \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi') \}, \\
 \frac{de}{dt} &= L_e \sum_{\substack{k,l,m \\ i,j}} \{ e A_{2i,j}^{2k,2l,m} \sin [2k(\Omega' - \Omega) \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm \\
 &\quad \pm j\psi \pm m\psi'] + e B_{2i,j}^{1,2l,m} \cos (\Omega' - \Omega \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi') \}, \\
 \frac{ds}{dt} &= L_s \sum_{\substack{k,l,m \\ i,j}} \{ s A_{2i,j}^{2k,2l,m} \sin [2k(\Omega' - \Omega) \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi'] + \\
 &\quad + s B_{2i,j}^{1,2l,m} \cos (\Omega' - \Omega \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi') \}
 \end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= L_p \sum_{\substack{k,l,m \\ i,j}} \{ p A_{2i,j}^{2k,2l,m} \sin [2k(\Omega' - \Omega) \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi'] + \\
 &\quad + p B_{2i,j}^{1,2l,m} \cos (\Omega' - \Omega \pm 2l\omega' \pm 2i\omega \pm j\psi \pm m\psi') \},
 \end{aligned}$$

где индексы k, l, m, i, j принимают значения

$$k, l = 0, 1; \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$i = 0, 1, 2; \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;$$

коэффициенты же при суммах имеют вид

$$\begin{aligned}
 L_a &= \frac{a^2 \sqrt{e^2 - 1} \cdot n}{64 a'^3 (1 - e'^2)^3} \cdot \frac{2\hat{a}^2}{(1 + \bar{e} \cos \psi)^2}, \\
 L_e &= \frac{e a^2 \sqrt{e^2 - 1} \cdot n}{64 a'^3 (1 - e'^2)^3} \cdot \frac{\hat{p}}{(1 + \bar{e} \cos \psi)^2},
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$L_s = - \frac{a^2 \sqrt{e^2 - 1} \cdot n}{64 a'^3 (1 - e'^2)^3} \cdot \frac{\hat{p}}{\hat{s} (1 + \bar{e} \cos \psi)^2}$$

и

$$L_p = - \frac{a^2 \sqrt{e^2 - 1} \cdot n}{64 a'^3 (1 - e'^2)^3} \cdot \frac{2a^2 (e^2 - 1)^2}{(1 + \bar{e} \cos \psi)^2}$$

Из коэффициентов A и B , стоящих при тригонометрических функциях внутри сумм, опять выписываем только коэффициенты при постоянных членах сумм:

$${}_a a_{20}^{000} = 6(3e'^2 + 2)(2 - 3s'^2)e^2 s^2 \left\{ 1 - \frac{e^2}{8} [38e^2 - 48 - 5s^2(11e^2 - 13)] \right\},$$

$${}_a a_{40}^{000} = - \frac{3}{8} e^2 (3e'^2 + 2)(2 - 3s'^2) e^4 s^4,$$

$${}_a a_{\pm 20}^{020} = \pm \frac{27}{2} e'^3 s'^2 e^2 s^2 \left\{ 1 - \frac{e^2}{8} [38e^2 - 48 - 5s^2(11e^2 - 13)] \right\},$$

$${}_a a_{\pm 40}^{020} = \mp \frac{27}{32} e^2 e'^3 s'^2 e^4 s^4,$$

$${}_a a_{00}^{200} = \frac{3}{4} e^2 (3e'^2 + 2) s'^2 (13e^4 - 56e^2 + 8) \alpha s^2,$$

$${}_a a_{\pm 20}^{200} = \mp 3(3e'^2 + 2) s'^2 e^2 (1 \mp \alpha)^2 \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [7(3e^2 + 1) \pm 2\alpha(e^2 + 6) - 5\alpha^2(11e^2 - 13)] \right\},$$

$${}_a a_{\pm 40}^{200} = \pm \frac{3e^2}{16} (3e'^2 + 2) s'^2 e^4 (1 \mp \alpha)^2 s^2,$$

$${}_a a_{00}^{2\pm 20} = \frac{9e^2}{16} e'^2 (1 \pm \alpha')^2 (13e^4 - 56e^2 + 8) \alpha s^2,$$

$${}_a a_{\pm 20}^{2+20} = \mp \frac{9}{4} e'^2 (1 + \alpha')^2 e^2 (1 \mp \alpha)^2 \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [7(3e^2 + 1) \pm 2\alpha(e^2 + 6) - 5\alpha^2(11e^2 - 13)] \right\},$$

$${}_a a_{\pm 40}^{2+20} = \pm \frac{9e^2}{64} e'^2 (1 + \alpha')^2 e^4 (1 \mp \alpha)^2,$$

$${}_a B_{00}^{100} = - 3e^2 \alpha' s' (3e'^2 + 2) s [8(e^2 - 1)^2 - 5s^2 e^2 (e^2 - 8)],$$

$${}_a B_{\pm 20}^{100} = 24 \alpha' s' (3e'^2 + 2) (1 \mp \alpha) s e^2 \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [18e^2 - 11 \pm \alpha(e^2 + 6) - 5\alpha^2(11e^2 - 13)] \right\},$$

$${}_a B_{\pm 40}^{100} = - \frac{3}{2} e^2 \alpha' s' (3e'^2 + 2) (1 \mp \alpha) s^3 e^4, \quad (10)$$

$${}_a B_{00}^{1\pm 20} = \pm \frac{9}{4} e^2 e'^2 (1 \pm \alpha') s' s [8(e^2 - 1)^2 - 5s^2 e^2 (e^2 - 8)],$$

$${}_a B_{\pm 20}^{1+20} = \pm \frac{18}{4} e'^2 s' (1 + \alpha') s (1 \mp \alpha) e^2 \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [18e^2 - 11 \pm \alpha(e^2 + 6) - 5\alpha^2(11e^2 - 13)] \right\},$$

$$\begin{aligned}
 {}_a B_{\pm 40}^{1+20} &= \pm \frac{9}{8} \varepsilon^2 e'^2 s' (1 \pm \alpha') e^4 s^3 (1 \mp \alpha); \\
 {}_e a_{20}^{000} &= 2(3e'^2 + 2)(2 - 3s'^2) e^2 s^2 \left\{ 3 + \frac{\varepsilon^2}{8} [55(e^2 - 1) - 3\alpha^2(91e^2 - 69)] \right\}, \\
 {}_e a_{40}^{000} &= -\frac{3}{8} \varepsilon^2 (3e'^2 + 2)(2 - 3s'^2) e^4 s^4, \\
 {}_e a_{\pm 20}^{020} &= \pm \frac{9}{8} s'^2 e'^2 s^2 e^2 \left\{ 3 + \frac{\varepsilon^2}{8} [55(e^2 - 1) - 3\alpha^2(91e^2 - 69)] \right\}, \\
 {}_e a_{\pm 40}^{020} &= \mp \frac{27}{32} \varepsilon^2 s'^2 e'^2 s^4 e^4, \\
 {}_e a_{00}^{200} &= \frac{3}{4} \varepsilon^2 s'^2 (3e'^2 + 2) \alpha s^2 (57e^4 - 44e^2 - 48), \\
 {}_e a_{\pm 20}^{200} &= \mp 3s'^2 (3e'^2 + 2) (1 \mp \alpha)^2 e^2 \times \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} [17e^2 + 11 \pm 2\alpha(e^2 + 6) - \alpha^2(91e^2 - 69)] \right\}, \\
 {}_e a_{\pm 40}^{200} &= \pm \frac{3\varepsilon^2}{16} s'^2 (3e'^2 + 2) s^2 (1 \mp \alpha)^2 e^4, \\
 {}_e a_{00}^{2\pm 20} &= \frac{9\varepsilon^2}{16} (1 \pm \alpha')^2 e'^2 \alpha s^2 (57e^4 - 44e^2 - 48), \\
 {}_e a_{\pm 20}^{2+20} &= \mp \frac{9}{4} (1 \pm \alpha')^2 e'^2 (1 \mp \alpha)^2 e^2 \times \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} [17e^2 + 11 \pm 2\alpha(e^2 + 6) - \alpha^2(91e^2 - 69)] \right\}, \\
 {}_e a_{\pm 40}^{2+20} &= \pm \frac{9\varepsilon^2}{64} (1 \pm \alpha')^2 e'^2 (1 \mp \alpha)^2 s^2 e^4; \\
 {}_e B_{00}^{100} &= \frac{3}{2} \varepsilon^2 \alpha' s' (3e'^2 + 2) s [e^4 - 20e^2 - 16 - \alpha^2(57e^4 - 44e^2 - 48)], \\
 {}_e B_{\pm 20}^{100} &= [24\alpha' s' (3e'^2 + 2) (1 \mp \alpha) s e^2 \times \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} [18e^2 - 11 \pm \alpha(e^2 + 6) - \alpha^2(91e^2 - 69)] \right\}], \quad (10) \\
 {}_e B_{\pm 40}^{100} &= -\frac{3}{4} \varepsilon^2 \alpha' s' (3e'^2 + 2) (1 \mp \alpha) s^3 e^4, \\
 {}_e B_{00}^{1\pm 20} &= \mp \frac{9}{8} \varepsilon^2 (1 \pm \alpha') s' e'^2 s [e^4 - 20e^2 - 16 - \alpha^2(57e^4 - 44e^2 - 48)], \\
 {}_e B_{\pm 20}^{1+20} &= \mp \frac{9}{8} (1 \pm \alpha') s' e'^2 (1 \mp \alpha) s e^2 \times \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} [18e^2 - 11 \pm \alpha(e^2 + 6) - \alpha^2(91e^2 - 69)] \right\}, \\
 {}_e B_{\pm 40}^{1+20} &= \pm \frac{9\varepsilon^2}{16} (1 \pm \alpha') s' e'^2 (1 \mp \alpha) s^3 e^4; \\
 {}_s a_{20}^{000} &= -\varepsilon^2 (3e'^2 + 2)(2 - 3s'^2) e^2 \alpha^2 s^2 (2 - 9s^2), \\
 {}_s a_{\pm 20}^{020} &= \mp \frac{9}{4} \varepsilon^2 e'^2 s'^2 e^2 \alpha s^2 (2 - 9s^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s a_{00}^{200} &= -12 s'^2 (3 e'^2 + 2) \alpha \widehat{s} \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [17 e^2 + 20 - \alpha^2 (73 e^2 + 16)] \right\}, \\
s a_{\pm 20}^{200} &= \frac{3}{4} e^2 s'^2 (3 e'^2 + 2) \alpha (1 \mp \alpha) s^2 (5 \mp 5 \alpha + 6 \alpha^2) e^2, \\
s a_{00}^{2+20} &= -\frac{9}{4} e'^2 (1 \pm \alpha')^2 \alpha \widehat{s}^3 \times \\
&\times \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [17 e^2 + 20 - \alpha^2 (73 e^2 + 16)] \right\}, \\
s a_{\pm 20}^{2+20} &= \frac{9 e^2}{16} e'^2 (1 + \alpha')^2 e^2 \alpha s^2 (1 \mp \alpha) (5 \mp 5 \alpha + 6 \alpha^2); \\
s B_{00}^{100} &= 24 \alpha' s' (3 e'^2 + 2) \alpha \widehat{s} \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [15 e^2 + 16 - \alpha^2 (77 e^2 + 12)] \right\}, \\
s B_{\pm 20}^{100} &= \mp \frac{3}{2} e^2 \alpha' s' (3 e'^2 + 2) \alpha \widehat{s} (1 \mp \alpha) (3 \mp 15 \alpha + \alpha^2 \pm 20 \alpha^3) e^2, \\
s B_{00}^{1 \pm 20} &= \pm 18 e'^2 (1 \pm \alpha') s' \alpha^2 \widehat{s} \left\{ 1 + \frac{e^2}{8} [15 e^2 + 16 - \alpha^2 (77 e^2 + 12)] \right\}, \\
s B_{\pm 20}^{1 \pm 20} &= \pm \frac{9}{8} e^2 e'^2 s' (1 + \alpha') e^2 s \alpha (1 \mp \alpha) (3 \mp 15 \alpha + \alpha^2 \pm 20 \alpha^3); \\
p a_{20}^{000} &= e^2 (3 e'^2 + 2) (2 - 3 s'^2) e^2 s^2 (2 - 3 s^2), \\
p a_{\pm 20}^{020} &= \pm \frac{9}{4} e^2 e'^2 s'^2 e^2 s^2 (2 - 3 s^2), \\
p a_{00}^{200} &= -3 e^2 (3 e'^2 + 2) s'^2 (11 e^2 + 14) s^2 \alpha, \\
p a_{\pm 20}^{200} &= \mp \frac{3}{2} e^2 (3 e'^2 + 2) s'^2 e^2 (1 \mp \alpha)^2 (1 + \alpha^2), \\
p a_{00}^{2 \pm 20} &= -\frac{9}{4} e^2 e'^2 (1 \pm \alpha')^2 (11 e^2 + 14) s^2 \alpha, \\
p a_{\pm 20}^{2+20} &= \mp \frac{9}{8} e^2 e'^2 (1 + \alpha')^2 e^2 (1 \mp \alpha)^2 (1 + \alpha^2); \\
p B_{00}^{100} &= 6 e^2 \alpha' s' (3 e'^2 + 2) s [10 e^2 + 12 - s^2 (11 e^2 + 14)], \\
p B_{\pm 20}^{100} &= 6 e^2 \alpha' s' (3 e'^2 + 2) s (1 \mp \alpha) \alpha^2 e^2, \\
p B_{00}^{1 \pm 20} &= \mp \frac{9}{2} e^2 e'^2 (1 \pm \alpha') s' s [10 e^2 + 12 - s^2 (11 e^2 + 14)], \\
p B_{\pm 20}^{1 \pm 20} &= -\frac{9}{2} e^2 e'^2 (1 + \alpha') s' e^2 (1 \mp \alpha) \alpha^2 s. \quad (10)
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепурова В. М. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астроном.», 1977, 18, № 1.
2. Чепурова В. М. «Бюллетень ИТА», 1969, 12, № 2 (135).
3. Чепурова В. М. «Сообщения ГАИШ», 1969, № 159.
4. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. «Астрономический журнал», 1963, 40, вып. 2.

Поступила в редакцию
8.6 1976 г.
Кафедра
небесной механики
и гравиметрии