

УДК 537.86 : 530.182

Г. В. Белокопытов

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕ-
ЗОНАТОРАХ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методом медленно меняющихся стоячих волн получены укороченные уравнения, описывающие трехчастотные резонансные параметрические взаимодействия в нелинейных диэлектрических резонаторах. Уравнения пригодны для неоднородной и анизотропной среды. Учтены реакции накачки и нелинейные расстройки как электрического, так и теплового характера.

Возможность использования параэлектрических резонаторов в качестве нелинейных элементов параметрических усилителей СВЧ обсуждалась в работах [1—7]. Распределенный характер регенерации в устройствах такого типа имеет следствием резкое уменьшение напряженности электрического поля накачки по сравнению с усилителями на нелинейных параэлектрических элементах сосредоточенного типа. Предполагается, что это позволит радикально ослабить интенсивность неравновесных процессов, существенно повышающих шумовую температуру [8, 9]. Уменьшение интенсивности накачки позволит также обеспечить благоприятный тепловой режим нелинейного элемента. Диэлектрические активные резонаторы выгодно отличаются и от устройств бегущей волны [10—12] удобством согласования с внешними цепями, простотой реализации и существенно меньшей мощностью накачки. Кроме того, совмещение в одном элементе (диэлектрическом резонаторе) нелинейных и резонансных свойств открывает новые возможности миниатюризации параметрических усилителей.

Анализ особенностей нелинейных взаимодействий различных типов колебаний в диэлектрических резонаторах проводился в [1—4]. Параметрические взаимодействия колебаний в резонаторах с распределенной нелинейностью рассматривались также в теории параметрических генераторов света [13, 14], параметрических усилителей на феррите [15], полупроводниковых распределенных генераторов [16—18]. В настоящей работе получены укороченные уравнения, весьма полно описывающие динамику параметрических взаимодействий в нелинейных диэлектрических резонаторах. При этом в отличие от указанных выше работ расчет ведется для неоднородной и анизотропной активной среды. Произведен также учет реакции накачки. Применение для вывода укороченных уравнений метода медленно меняющихся стоячих волн позволило учесть как линейные, так и нелинейные расстройки.

Теоретическое исследование электромагнитных колебаний в резонаторе, содержащем нелинейный диэлектрик, сводится к решению макроскопических уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2)$$

В настоящей работе материалы уравнения, связывающие между собой величины электрических полей, индукций и токов, взяты в виде

$$E_i = \kappa_{ik} D_k + \lambda_{ikl} D_k D_l + \nu_{iklm} D_k D_l D_m, \quad (3)$$

$$j_i = j'_i + \rho_{ik} D_k + \theta_{ikl} D_k D_l. \quad (4)$$

Здесь и далее, кроме особо оговоренных случаев производится суммирование по повторяющимся индексам. Полагаем среду немагнитной, т. е. считаем, что $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, где $\mu(\mathbf{r}) = \text{const}$. Запись материальных уравнений в виде (3) и (4) выбрана нами из следующих соображений.

Во-первых, нелинейные диэлектрические свойства сегнетоэлектриков, в том числе и в параэлектрической фазе, принято характеризовать разложением термодинамического потенциала по степеням поляризации. Для веществ с кубической симметрией кристаллической решетки можно записать аналогично разложению Гинзбурга — Девоншира [19].

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha D^2 + \beta_1 D^4 + \beta_2 (D_x^2 D_y^2 + D_y^2 D_z^2 + D_x^2 D_z^2) + \frac{1}{3} \gamma_1 D^6 + \\ + \gamma_2 [D_x^4 (D_y^2 + D_z^2) + D_y^4 (D_x^2 + D_z^2) + D_z^4 (D_x^2 + D_y^2)] + \gamma_3 D_x^2 D_y^2 D_z^2.$$

Здесь Φ_0 , α , β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2 , γ_3 — коэффициенты разложения, зависящие в общем случае от температуры. Отсюда легко получить выражения для компонентов κ_{ik} , λ_{ikl} и ν_{iklm} через коэффициенты термодинамического разложения. Так, для реализации эффективного нелинейного взаимодействия к диэлектрику прикладывается постоянное поле смещения $E_{\text{см}}$. Если одновременно со смещающим полем на диэлектрик воздействует переменное поле E_- ($|E_-| \ll |E_{\text{см}}|$), то для высокочастотного поля диэлектрик является нелинейной средой, характеризуемой разложением типа (3). При этом если оба поля ($E_{\text{см}}$ и E_-) приложены вдоль осей x , то

$$\kappa_{11} = 2\alpha + 6\beta_1 D_{\text{см}}^2 + 10\gamma_1 D_{\text{см}}^4,$$

$$\lambda_{111} = 6\beta_1 D_{\text{см}} + 40\gamma_1 D_{\text{см}}^3,$$

$$\nu_{1111} = 2\beta_1 + 40\gamma_1 D_{\text{см}}^2.$$

Во многих практически удобных структурах поле смещения неоднородно. В этом случае коэффициенты разложения нелинейной диэлектрической восприимчивости зависят от координат.

Во-вторых, нелинейные свойства резонаторов, заполненных параэлектриком, могут быть отчасти связаны с зависимостью диэлектрических потерь от приложенного электрического поля. На заметную величину этой зависимости указывают как теоретические, так и экспериментальные работы [20—22]. Наконец, запись материальных уравнений в виде (3), (4) удобна при выводе укороченных уравнений в случае неоднородной среды.

В силу многообразия возможных конфигураций резонаторов (замкнутых или открытых, с металлическими электродами или без них) мы не будем конкретизировать вид граничных условий. Воздействие сторонних источников будем описывать распределенным током j' . Поскольку экспериментальные данные показывают, что у диэлектриков, перспективных для применения на СВЧ (например, титанат стронция), заметная дисперсия в парафазе отсутствует вплоть до частот порядка 10^{12} Гц [23], будем пренебрегать частотной зависимостью диэлектрической проницаемости.

Перейдем к решению нелинейной задачи (1) — (4). Введем обозначения: ϵ_{ikl} — единичный антисимметричный тензор (Леви—Чивита), ∂_k — дифференцирование по k -й координате. Из (1), (2), получаем

$$\frac{c}{\mu} \epsilon_{ikl} \partial_k \epsilon_{lmn} \partial_m E_n + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} j_l + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 D_l}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

После подстановки в (5) выражений (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu} \epsilon_{ikl} \partial_k \epsilon_{lmn} \partial_m (\kappa_{nq} D_q + \lambda_{nqr} D_q D_r + \nu_{nqrs} D_q D_r D_s) + \\ + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{iq} D_q + \theta_{iqr} D_q D_r + j_i) + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 D_i}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем искать D_i в виде ряда по собственным функциям линейной задачи:

$$\frac{c}{\mu} \epsilon_{ikl} \partial_k \epsilon_{lmn} \partial_m \kappa_{nq} D_{aq} = \frac{\omega_a^2}{c} D_{ai} \quad (7)$$

с соответствующими граничными условиями. Здесь ω_a — a -я собственная частота линейного резонатора (суммирование по a в (7) не проводится). Для нормированных собственных функций задачи (7) имеют место соотношения ортогональности:

$$\int_V \kappa_{ik} D_{ak} D_{bi} dV = \delta_{ab}.$$

Предполагаем, что вырождение типов колебаний в резонаторе отсутствует. Представим $D_i(\mathbf{r}, t)$ в уравнении (6) в виде

$$D_i(\mathbf{r}, t) = p_a(t) D_{ai}(\mathbf{r}).$$

Умножив (6) на $\kappa_{iw} D_{fw}$ и выполнив интегрирование по объему резонатора и суммирование по a , получим уравнения, усредненные по пространственным переменным:

$$\ddot{p}_f + \omega_f p_f = F_f(p|, \dot{p}|, p'(t)), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} F_f &= -\dot{p}_a R_{fa} - (\dot{p}_a p_b + p_a \dot{p}_b) \Theta_{fab} - p_a p_b \Lambda_{fab} - p_a p_b p_c N_{fabc} - p_f'', \\ R_{fa} &= 4\pi \int_V \kappa_{iw} D_{fw} \rho_{iq} D_{aq} dV, \\ \Theta_{fab} &= 4\pi \int_V \kappa_{iw} D_{fw} \theta_{iqr} D_{aq} D_{br} dV, \\ \Lambda_{fab} &= \frac{c^2}{\mu} \int_V \kappa_{iw} D_{fw} \epsilon_{ikl} \partial_k \epsilon_{lmn} \partial_m \lambda_{nqr} D_{aq} D_{br} dV, \\ N_{fabc} &= \frac{c^2}{\mu} \int_V \kappa_{iw} D_{fw} \epsilon_{ikl} \partial_k \epsilon_{lmn} \partial_m \nu_{nqrs} D_{aq} D_{br} D_{cs} dV, \\ p_f'' &= 4\pi \int_V \kappa_{iw} D_{fw} \frac{\partial}{\partial t} j_i(\mathbf{r}, t) dV. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть в резонаторе имеется тройка собственных частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, между которыми выполняется условие приближенного синхронизма $\omega_3 - \omega_1 = \omega_2(1 + \Delta_0)$, где Δ_0 имеет порядок η ($\eta \ll 1$).

Пусть на систему действуют внешние гармонические силы на частотах ω_n и ω_c :

$$\omega_n = \omega_3(1 + \Delta_3); \quad \omega_c = \omega_1(1 + \Delta_1),$$

$$p''_1 = 4\pi\omega_c J_c \cos(\omega_c t + \psi_c); \quad p''_3 = 4\pi\omega_n J_n \cos \omega_n t.$$

Считаем, что расстройки Δ_1 и Δ_3 малы ($\Delta_1, \Delta_3 \sim \eta$). Обозначим также

$$\omega_x = \omega_n - \omega_c,$$

$$\Delta_2 = (\omega_3\Delta_0 + \omega_3\Delta_3 - \omega_1\Delta_1)/\omega_2.$$

Если рассматриваемая распределенная система близка к консервативной, то F_f в правой части (8) имеет порядок η . Применяя в этом случае метод медленно меняющихся амплитуд, будем искать решение первого приближения системы (8) в виде

$$p_f(t) = x_f(t) \cos(\tilde{\omega}_f t + \varphi_f(t)).$$

Здесь x_f и φ_f — «медленные» амплитуды и фазы, $\tilde{\omega}_f$ принимает значения $\omega_c, \omega_x, \omega_n$. Проводя обычные преобразования, получим следующие укороченные уравнения:

$$2\omega_c \dot{x}_c + R_c \omega_c x_c + (\Lambda_c \sin \Psi - \omega_c \Theta_c \cos \Psi) x_n x_x = 4\pi\omega_c J_c \sin(\psi_c - \varphi_c), \quad (10, a)$$

$$2\omega_c \dot{\varphi}_c x_c - (\Lambda_c \cos \Psi + \omega_c \Theta_c \sin \Psi) x_n x_x -$$

$$- \frac{x_c}{4} (3N_{cc}x_c^2 + N_{cx}x_x^2 + N_{cn}x_n^2 + 8\Delta_1\omega_c^2) = -4\pi\omega_c J_c \cos(\psi_c - \varphi_c), \quad (10, б)$$

$$2\omega_x \dot{x}_x + R_x \omega_x x_x + (\Lambda_x \sin \Psi - \omega_x \Theta_x \cos \Psi) x_n x_c = 0, \quad (10, в)$$

$$2\omega_x \dot{\varphi}_x x_x - (\Lambda_x \cos \Psi + \omega_x \Theta_x \sin \Psi) x_n x_c -$$

$$- \frac{x_x}{4} (3N_{xx}x_x^2 + N_{xc}x_c^2 + N_{xn}x_n^2 + 8\Delta_2\omega_x^2) = 0, \quad (10, г)$$

$$2\omega_n \dot{x}_n + R_n \omega_n x_n - (\Lambda_n \sin \Psi - \omega_n \Theta_n \cos \Psi) x_c x_x = -4\pi\omega_n J_n \sin \varphi_n, \quad (10, д)$$

$$2\omega_n \dot{\varphi}_n x_n - (\Lambda_n \cos \Psi + \omega_n \Theta_n \sin \Psi) x_c x_x -$$

$$- \frac{x_n}{4} (3N_{nn}x_n^2 + N_{nc}x_c^2 + N_{nx}x_x^2 + 8\Delta_3\omega_n^2) = -4\pi\omega_n J_n \cos \varphi_n. \quad (10, е)$$

Здесь $\Psi = \varphi_n - \varphi_c - \varphi_x$; $\Lambda_c = \Lambda_{123} = \Lambda_{132}$; $\Lambda_x = \Lambda_{213} = \Lambda_{231}$; $\Lambda_n = \Lambda_{312} = \Lambda_{321}$; $\Theta_c = \Theta_{123} = \Theta_{132}$; $\Theta_x = \Theta_{213} = \Theta_{231}$; $\Theta_n = \Theta_{312} = \Theta_{321}$. В выражениях для R и N вместо пар индексов 11, 22, 33 использованы c, x, n соответственно.

Для применимости уравнений (10) кроме обычных предположений о медленном изменении амплитуд весьма существенным является требование синхронного взаимодействия лишь трех типов волн. При этом в отличие от нелинейного взаимодействия бегущих волн общий характер процессов в диэлектрическом резонаторе зависит не только от соотношения «длины формирования разрыва» и длины когерентного взаимодействия [24], но и от характерного размера резонатора и граничных условий.

Система (10) формально аналогична системе уравнений, описывающей параметрический генератор с тремя сосредоточенными контурами [25]. При этом Λ играют роль главных коэффициентов параметрической связи, влияние членов, пропорциональных Θ , подобно диссипативному механизму амплитудного ограничения, а пропорциональных N — подобно расстройному механизму в полупроводниковых параметрических генераторах. Однако, как уже отмечалось, в отличие от систем с сосредоточенными параметрами коэффициенты параметрического взаимодей-

ствия в нелинейных резонаторах существенно зависят от пространственного распределения типов колебаний. Эта зависимость определяется выражениями (9).

В нелинейных сегнетоэлектрических резонаторах существует еще один специфический механизм, ведущий к нелинейному ограничению амплитуды колебаний. Так как сегнетоэлектрик обладает значительной температурной зависимостью диэлектрических свойств, то высокочастотный нагрев за счет потерь приводит к изменению его параметров. Наиболее существенным является изменение собственных частот резонатора от значений ω_f к новым значениям ω'_f :

$$\omega'_f = \omega_f (1 - \delta_f).$$

Возьмем температурную зависимость диэлектрической восприимчивости в виде

$$\kappa_{ik}(\mathbf{r}, T) = \kappa_{ik}(\mathbf{r}, T_0) + \left. \frac{d\kappa_{ik}}{dT} \right|_{T=T_0} u,$$

где $u(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}) - T_0$ — малое изменение температуры от начального значения T_0 . Используя вариационное выражение для собственных частот резонатора [26], легко получим

$$\delta_f = \frac{1}{2} \int_V u(\mathbf{r}) \frac{d\kappa_{ik}}{dT} D_{fk} D_{fi} dV$$

(здесь и в дальнейшем суммирование по f не производим). Распределение температуры в резонаторе подчиняется уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u + F_1(\mathbf{r}, t)$$

с соответствующими начальными и линейными граничными условиями. Здесь a — коэффициент теплопроводности, $F_1(\mathbf{r}, t)$ — плотность источников тепла: $F_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c\rho} \sum_f B_f(\mathbf{r}) x_f^2(t)$, c — удельная теплоемкость,

ρ — плотность диэлектрика, $B_f = \frac{1}{8} \rho_{ik} D_{fk} \kappa_{il} D_{fi}$. Таким образом, переходные процессы в рассматриваемой системе зависят не только от электрических, но и от тепловых характеристик нелинейного резонатора.

В стационарном случае решение уравнения теплопроводности является суперпозицией решений задач

$$\nabla^2 u_a + \frac{1}{k} B_a = 0$$

с соответствующими граничными условиями, где k — коэффициент теплопроводности. Легко убедиться в том, что $u(\mathbf{r}) = u_a x_a^2$. Таким образом,

$$\delta_f = n_{fa} x_a^2, \quad (11)$$

где

$$n_{fa} = \frac{1}{2} \int_V u_a(\mathbf{r}) \frac{d\kappa_{ik}}{dT} D_{fi} D_{fk} dV.$$

Изменение резонансных частот следует учесть в укороченных уравнениях заменой Δ_f на $\Delta_f + \delta_f$. Из (10) и (11) очевидно, что это эквивалентно замене коэффициентов N_{fa} на N'_{fa} , где

$$N'_{fa} = N_{fa} + n_{fa} \left(8 - \frac{16}{3} \delta_{fa} \right) \omega_f^2.$$

Таким образом, в стационарном режиме воздействие механизмов электрической и тепловой расстройки совершенно аналогично. Различие между ними проявляется лишь в неустановившемся режиме.

Используя систему (10), можно исследовать свойства нелинейного диэлектрического резонатора в режимах ниже и выше порога параметрического самовозбуждения. При этом ряд результатов можно получить, используя аналогию систем укороченных уравнений для распределенных и сосредоточенных нелинейных элементов. Для исследования переходных процессов необходимо в общем случае учитывать инерционные тепловые явления.

Строго говоря, в уравнениях (10) не учтены потери в электродах и потери на излучение, однако для систем, близких к консервативным, можно считать все виды потерь независимыми и использовать полученную систему, изменив лишь нужным образом численные значения коэффициентов R .

Отметим, что подобным образом можно получить уравнения, описывающие параметрические взаимодействия при нерезонансной накачке, однако рассмотренный резонансный случай энергетически предпочтителен, так как позволяет добиться хорошего согласования резонатора с источником накачки [2].

Автор выражает глубокую благодарность И. В. Иванову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Billetter T. R., Giarola A. J., Bjorkstam J. «J. Appl. Phys.», 1964, 35, 7, 2159.
2. Иванов И. В., Ангелов И. М., Лаптев А. Г. «Изв. вузов. Радиоэлектроника», 1973, 16, 11—28.
3. Иванов И. В. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., astron.», 1973, 14, № 4, 501.
4. Ангелов И. М. Канд. дис. МГУ, 1973.
5. Иванов И. В., Ангелов И. М. Авторское свидетельство № 403064, 23 июня 1972 г. Бюллетень изобр., 1973, № 42.
6. Иванов И. В., Бузин И. М., Белокопытов Г. В., Рукин Е. И., Дашенко В. В. В кн.: Новые пьезо- и сегнетоматериалы и их применение. М., 1975.
7. Рубан А. С. «Изв. ЛЭТИ», 1976, вып. 190, 12.
8. Вендик О. Г., Кейс В. Н. и др. «Радиотехника и электроника», 1974, 19, 2215.
9. Тер-Мартirosян Л. Т. «Радиотехника и электроника», 1975, 20, 2592.
10. Cassedy E. S. «Proc. IRE», 1959, 47, 1374.
11. Козырев А. Б. Канд. дис. ЛЭТИ, 1974.
12. Барсуков Ю. К. «Радиотехника и электроника», 1975, 20, 1379; 8, 1592.
13. Yariv A. «IEEE J-l of Quant. Electr.», 1966, QE-2, 2—30.
14. Yariv A. «Louisell W. H.» IEEE J-l of Quant. Electr., 1966, QE-2, 9—418.
15. Suhl H. «J. Appl. Phys.», 1957, 28, 1125.
16. Уткин Г. М. «Радиотехника и электроника», 1969, 14, 267.
17. Уткин Г. М. «Радиотехника и электроника», 1970, 15, 741.
18. Панина Т. А., Уткин Г. М. «Изв. вузов. Радиофизика», 1972, 15, 1509.
19. Холоденко Л. П., Термодинамическая теория сегнетоэлектриков типа титаната бария. Рига, 1971.
20. Вендик О. Г. «Физика твердого тела», 1975, 17, 1683.
21. Bethe K. «Philips Res. Rept. Suppl.», 1970, 2, 59.
22. Агафонов Ю. А., Вендик О. Г. и др. «Изв. АН СССР. Сер. физич.» 1975, 39, 841.
23. Neville R. C., Holnesein B., Mead H. «J. Appl. Phys.», 1972, 43, 2124.
24. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
25. Каплай А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М., 1966.
26. Berk A. D. «IRE Trans. Antennas and Propagation», 1956, AP-4, 2—101.

Поступила в редакцию
26.10 1976 г.
Кафедра
физики колебаний