УДК 537.86 : 539.12

Г. М. Манева
(Болгария)

ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА ПРИ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА СО СКОРОСТЬЮ, ПРЕВЫШАЮЩЕЙ СКОРОСТЬ СВЕТА В ВАКУУМЕ

Показано, что возникает весьма реальное излучение при движении источника со сверхзвуковой скоростью вдоль плоской границы двух сред, возникающее при соответствующих условиях в обеих средах. Это справедливо для любых сред с $\varepsilon<1$ и вакуума.

Рассмотрим решение задачи о падении заряженной нити на плоскую границу раздела двух сред. Пространство заполнено двумя полубесконечными средами, которые характеризуются комплексными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Магнитные проницаемости $\mu_1=\mu_2=1$. Функции $\varepsilon_{1,2}$ могут зависеть от частоты ω, что эквивалентно учету дисперсии. Границей раздела является плоскость $y=0$, причем ε_1 — параметр среды, заполняющей полупространство $y>0$. Нить находится в плоскости xy и составляет с осью x угол Ψ. Скорость движения нити $\mathbf{u}(0, -u, 0)$ параллельна оси y (рис. 1). Считаем, что скорость нити дочеренковская для обеих сред, т. е. $u<c/\sqrt{\varepsilon_n}$ $(n=1, 2)$. Линейная плотность заряда q. При равномерном движении элементарного участка нити в однородной среде его излучение равно нулю. При пересечении границы раздела возникает переходное излучение. Скорость v, с которой движется точка пересечения, равна

$$v=\frac{u}{\operatorname{tg}\Psi}. \tag{1}$$

Можно подобрать u и Ψ так, что величина v окажется сколь угодно большой, в частности больше скорости света в вакууме c. Таким образом, источником излучения можно считать точку пересечения нити с плоскостью раздела. В [1] было показано, что аналогичные сверхсветовые источники дают вполне реальное излучение, причём при условии $v>c$ вследствие интерференции излучение в вакууме дает черенковский конус. Этот результат был предсказан в [2 и 3].

Найдем количественное решение задачи о падении заряженной нити на границу раздела двух произвольных сред. Запишем Фурье-компонент плотности тока, создаваемого всей нитью:

$$j_\omega=-\frac{q}{2\pi\cos\psi}\,e^{i(\omega x/v)}\,e^{-i(\omega y/u)}\,\delta(z),$$

где

$$\mathbf{j}_\omega(0,\, j_\omega,\, 0) \text{ и } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})\,d_\omega.$$

Введем потенциал Герца $\mathbf{\Pi}_\omega(\mathbf{r})$, определяемый равенствами:

$$\mathbf{A}_\omega=-\frac{i\omega}{c}\,\mathbf{\Pi}_\omega,\quad \varphi_\omega-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_\omega, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}_\omega$ и φ_ω — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля. Вектор Герца $\mathbf{\Pi}_\omega$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{\Pi}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{\Pi}_\omega = -4\pi \mathbf{p}_\omega, \tag{3}$$

где вектор поляризации $\mathbf{p}_\omega = \frac{i}{\omega} \mathbf{j}_\omega$.

Заряд q, движущийся равномерно в плоскости xy параллельно оси y и имеющий координату $x = a \cos \Psi$, где a — действительное число, создает ток

$$j_\omega(a) = -\frac{q}{2\pi} \delta(z) \delta(x - a \cos) \Psi \, e^{i(\omega/u) a \cos \Psi} e^{-i(\omega/u) y}. \tag{4}$$

Учитывая линейность оператора Д'Аламбера и соотношение между плотностями токов (1) и (4) $j_\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} j_\omega(a)\, da$, можно представить поле

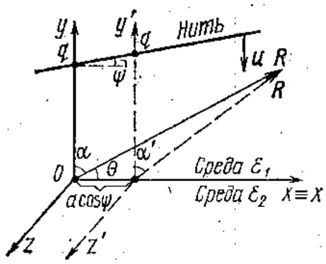

Рис. 1

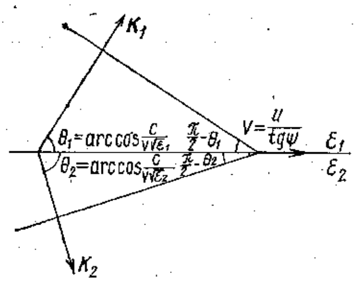

Рис. 2

излучения нити в виде суммы излучений элементарных зарядов $q|da|$, расположенных по длине нити.

Заряд q, равномерно движущийся по оси y и пересекающий границу раздела в момент $t=0$, создает плотность тока

$$j_\omega = -\frac{q}{2\pi} \delta(z) \delta(x) e^{-i(\omega y/u)}.$$

В данном случае отличен от нуля только компонент поля $\Pi_{\omega_y} \equiv \Pi_\omega$. На большом расстоянии от точки пересечения границы раздела поле возникающего переходного излучения имеет вид сферической волны. В случае $\omega > 0$ поле излучения $\Pi^1_\omega(0)$ и $\Pi^2_\omega(0)$ в соответствующих полупространствах $y>0$ и $y<0$ записывается в виде

$$\Pi^n_\omega(0) = \frac{qc \cos \alpha}{\pi \omega^2} f_n(\alpha) \frac{e^{i(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_n} R}}{R} \; n = 1, 2, \tag{5}$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \alpha} + \varepsilon_2 \cos \alpha} \left\{ \frac{\varepsilon_1 \frac{c}{u} - \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_1 \sin^2 \alpha - \varepsilon_2 + \frac{c^2}{u^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon_2 \frac{c}{u} - \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha}}{-\varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \frac{c^2}{u^2}} \right\}, \tag{6}$$

$$f_2(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_2^2\sin^2\alpha}-\varepsilon_1\cos\alpha}\left\{\frac{\varepsilon_2\frac{c}{u}+\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2\sin^2\alpha}}{\varepsilon_2\sin^2\alpha-\varepsilon_1+\frac{c^2}{u^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_1\frac{c}{u}+\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2\sin^2\alpha}}{-\varepsilon_2\cos^2\alpha+\frac{c^2}{u^2}}\right\}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки наблюдения, α — угол между $\mathbf{R}$ и осью y. Для $\omega<0$ нужно брать комплексно-сопряженные выражения.

Найдем поле выше рассмотренного элементарного заряда с координатой $x=a\cos\Psi$, движущегося в плоскости xy параллельно оси y и пересекающего границу раздела в момент $t=\frac{a\sin\psi}{u}$ (рис. 1). Для этой цели необходимо решить уравнение для вектора Герца (3) с плотностью тока (4). В координатной системе $x'y'z'$ с осью y', совпадающей с траекторией движения заряда, и осью x', совпадающей с x, поле $\Pi_\omega(a)$ будет иметь вид, аналогичный (13), с дополнительным множителем $e^{i\frac{\omega}{u}a\sin\psi}$:

$$\Pi_\omega^n(a)=\frac{qc\cos\alpha'}{\Pi\omega^2}f_n(\alpha')\,e^{i\frac{\omega}{u}a\sin\psi}\frac{e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_n}R'}}{R'}, \qquad (8)$$

где $f_n(\alpha')$ определяется формулами (6) и (7). Здесь α' — угол между осью y' и радиус-вектором точки наблюдения $\mathbf{R}'$ (рис. 1).

Рассматривая поле в волновой зоне источника, т. е. на расстояниях $R\gg|a|\cos\psi$, можем в экспоненте (8) заменить R' на $R-a\cos\psi\frac{x}{R}$, а в знаменателе оставить просто R. Для дальнейшего удобно в формуле (8) перейти к сферической системе координат с осью x, азимутальным углом φ и углом θ между радиус-вектором $\mathbf{R}$ и осью x (рис. 1). Пренебрегая в $\cos\alpha'$ членами порядка $\frac{a\cos\psi}{R^2}$, получаем

$$\Pi_\omega^n(a)=\frac{qc}{\pi\omega^2}\eta_n(\theta,\varphi)e^{i\frac{\omega}{u}a\sin\psi}e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_n}a\cos\psi\cos\theta}\frac{e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_n}R}}{R}, \qquad (9)$$

где

$$\eta_1(\theta,\varphi)=\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_1^2+\varepsilon_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}+\varepsilon_2\sin\theta\cos\varphi}\times$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon_1\frac{c}{u}-\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1+\varepsilon_1\sin^2\theta\cos^2\varphi}}{\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta\cos^2\varphi+\frac{c^2}{u^2}}-\frac{\varepsilon_2\frac{c}{u}-\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1+\varepsilon_1\sin^2\theta\cos^2\varphi}}{-\varepsilon_1\sin^2\theta\cos^2\varphi+\frac{c^2}{u^2}}\right\},$$

$$\eta_2(\theta,\varphi)=\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_2^2+\varepsilon_2^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}-\varepsilon_1\sin\theta\cos\varphi}\times$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon_2\frac{c}{u}+\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_2\sin^2\theta\cos^2\varphi}}{\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\frac{c^2}{u^2}}-\frac{\varepsilon_1\frac{c}{u}+\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_2\sin^2\theta\cos^2\varphi}}{-\varepsilon_2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\frac{c^2}{u^2}}\right\}.$$

Рассмотрим поле, создаваемое в волновой зоне всей нитью:

$$\Pi_\omega^n = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_\omega^n(a)\, da,$$

где Π_ω^n — поле излучения нити в среде с диэлектрической проницаемостью ε_n.

Получаем:

$$\Pi_\omega^n = \frac{2qc^2}{\omega^3 \cos\psi \sqrt{\varepsilon_n}} \eta_n(\theta, \varphi) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_n}R}}{R} \delta\left(\cos\theta - \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_n}}\right). \tag{10}$$

В выражения (10) входят множителем δ-функции. Это означает, что волновые векторы поля в волновой зоне источника $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_n}\frac{\mathbf{R}}{R}$ образуют со скоростью сверхсветового источника $\mathbf{v}$ углы θ_1 и θ_2, удовлетворяющие условию излучения Вавилова—Черенкова в соответствующих средах:

$$\cos\theta_n = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_n}}, \quad n = 1, 2.$$

Итак, при условии $\frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_n}} > 1$, выполняемом в какой-либо из сред, вследствие интерференции волн поле излучения отсутствует. Рассматриваемый источник излучает только при условии $v > c/\sqrt{\varepsilon_n}$, выполняемом хотя бы в одной из рассматриваемых сред. При этом, если для рассматриваемых частот обе среды являются прозрачными, волновые векторы излучения образуют два черенковских полуконуса с углами раствора θ_1 для $y>0$ и θ_2 для $y<0$ (рис. 2). Имея в виду, что v может быть сколь угодно большой, излучение Вавилова — Черенкова существует в любой среде, в том числе в вакууме или при $\varepsilon<1$.

В волновой зоне источника

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \sqrt{\varepsilon_n}(\mathbf{n}\times\mathbf{E}); \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

где

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Для больших R, отбрасывая члены порядка $\frac{1}{R^2}$, получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\mathbf{n}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Отсюда, учитывая формулу (2), приходим к выражению, связывающему спектральные плотности $\mathbf{\Pi}_\omega$ и $\mathbf{H}_\omega$:

$$\mathbf{H}_\omega = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\omega^2}{c^2}(\mathbf{n}\times\mathbf{s})\,\Pi_\omega,$$

где $\mathbf{s}(0, 1, 0)$ — единичный вектор, направленный по оси y.

Учитывая выражение для плотности потока энергии $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}_x\mathbf{H}$ и формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt = 4\pi \int_0^{\infty} |f_\omega|^2\, d\omega$$

для спектральной плотности энергии в телесном углу $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, получаем

$$\frac{dW_{\theta,\varphi}}{d\omega} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c^3}\omega^4 |\mathbf{n}\times\mathbf{s}|^2 |\Pi_\omega|^2 R^2 d\Omega. \quad (11)$$

Как видно из (10), энергия излучения будет пропорциональная квадрату δ-функции. Интеграл от квадрата δ-функции расходится. Возникающая расходимость объяснима бесконечно длинным временем, в течение которого движется нить. Квадрат δ-функции можно записать в виде

$$\delta^2\left(\cos\theta - \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_n}}\right) = \delta\left(\cos\theta - \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_n}}\right)\frac{\omega v\sqrt{\varepsilon_n}}{2\pi c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\cos\theta\frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_n}-1\right)t} dt.$$

Имея в виду определение для δ-функции в показателе экспоненты, можем положить $\cos\theta\frac{v\sqrt{\varepsilon_n}}{c} = 1 = 0$. Считая, что источник движется в течение большого, но конечного интервала времени T, получаем

$$\delta^2\left(\cos\theta - \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_n}}\right) = \frac{\omega v\sqrt{\varepsilon_n}}{2\pi c} T\delta\left(\cos\theta - \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_n}}\right).$$

Отсюда, как и следовало ожидать, видно, что полная энергия излучения пропорциональна T.

Спектральная плотность энергии, излучаемой в единицу времени в телесный угол $d\Omega$ в полупространстве $y>0$:

$$\frac{dW^1_{\theta,\varphi,\omega}}{dt} = \frac{2q^2 v}{\omega\cos^2\psi\pi}|\eta_1|^2\{\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi\}\times$$
$$\times\ \delta\left(\cos\theta - \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_1}}\right)\sin\theta d\theta d\varphi d\omega. \quad (12)$$

Аналогично для $y<0$:

$$\frac{dW^2_{\theta,\varphi,\omega}}{dt} = \frac{2q^2 v}{\omega\cos^2\psi\pi}|\eta_2|^2\{\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi\}\times$$
$$\times\ \delta\left(\cos\theta - \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_2}}\right)\sin\theta d\theta d\varphi d\omega. \quad (13)$$

Для энергии, излучаемой в единицу времени в единичном интервале частот ω (для которых выполняется условие $v > c/\sqrt{\varepsilon_n(\omega)}$), после интегрирования по θ получаем зависимость от азимутального угла φ:

$$\frac{dW^n_{\varphi,\omega}}{dt} = \frac{2q^2 v}{\omega\cos^2\Psi\pi}|h_n|^2 d\varphi d\omega, \quad (14)$$

где

$$h_1 = \frac{\cos\varphi\sqrt{\left[1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon_1}\right]\left[\frac{c^2}{v^2\varepsilon_1}+\left(1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon_1}\right)\sin^2\varphi\right]}}{\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)+\varepsilon_1\cos^2\varphi\left(\varepsilon_1-\frac{c^2}{v^2}\right)}+\varepsilon_2\cos\varphi\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon_1}}}\times$$
$$\times\left\{\frac{\varepsilon_1\frac{c}{u}-\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1+\cos^2\varphi\left(\varepsilon_1-\frac{c^2}{v^2}\right)}}{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\frac{c^2}{u^2}-\cos^2\varphi\left(\varepsilon_1-\frac{c^2}{v^2}\right)}-\right.$$

$$-\left.\frac{\varepsilon_2\frac{c}{u}+\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1+\cos^2\varphi\left(\varepsilon_1-\frac{c^2}{v^2}\right)}}{-\cos^2\varphi\left(\varepsilon_1-\frac{c^2}{v^2}\right)+\frac{c^2}{u^2}}\right\}. \tag{15}$$

$$h_2=\frac{\cos\varphi\sqrt{\left[1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon_2}\right]\left[\frac{c^2}{v^2\varepsilon_2}+\left(1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon_2}\right)\sin^2\varphi\right]}}{\sqrt{\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\varepsilon_2\cos^2\varphi\left(\varepsilon_2-\frac{c^2}{v^2}\right)-\varepsilon_1\cos\varphi\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon_2}}}}\times$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon_1\frac{c}{u}+\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\cos^2\varphi\left(\varepsilon_2-\frac{c^2}{v^2}\right)}}{\frac{c^2}{u^2}-\cos^2\varphi\left(\varepsilon_2-\frac{c^2}{v^2}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_2\frac{c}{u}+\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\cos^2\varphi\left(\varepsilon_2-\frac{c^2}{v^2}\right)}}{\frac{c^2}{u^2}-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\cos^2\varphi\left(\varepsilon_2-\frac{c^2}{v^2}\right)}\right\}.$$

В случае падения заряженной нити на плоскую границу раздела вакуум — идеальный проводник, т. е. $\varepsilon_1=1$, $\operatorname{Im}\varepsilon_2=\infty$, для энергии, излучаемой в вакуум в единицу времени, получаем

$$\frac{dW_{\varphi,\omega}}{dt}=\frac{2q^2u^2}{\pi\omega v\cos^2\Psi}\,\frac{1+(\beta^2-1)\sin^2\varphi}{\left[1-\alpha^2\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)\cos^2\varphi\right]^2}\,d\varphi d\omega,$$

где $\alpha=\frac{u}{c}$; $\beta=\frac{v}{c}$.

Как видно из (14), спектральная плотность энергии падает с ростом ω. Надо отметить, что в силу малости длины волны нельзя рассматривать переход из одной среды в другую как резкий. Переходное излучение отдельных элементов нити в таком случае незначительно, что приводит к уменьшению черенковского излучения сверхсветового источника.

Изложенная постановка задачи может показаться несколько абстрактной. Однако аналогичные ситуации, по-видимому, могут иметь место в астрофизике [2, 4]. Кроме того, изложенный механизм может быть использован для генерации остронаправленного излучения.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Б. М. Болотовскому за постоянный интерес к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотовский Б. М., Гинзбург В. Л. Препринт ФИАН, т. 152, 1971; «Успехи физических наук», 1972, 106, 577.
2. Гинзбург В. Л. ЖЭТФ, 1972, 62, 173.
3. Франк И. М. «Изв. АН СССР», 1942, 2, 3.
4. Эйдман В. Я. «Изв. вузов. Радиофизика», 1972, 15, № 4.

Поступила в редакцию
13.4. 1973 г.
После переработки
6.5 1976 г.
НИИЯФ