

УДК 621.373.422

А. В. Иванов

О БИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ  
НА АВТОГЕНЕРАТОР

Рассматривается воздействие двух равных по амплитуде и произвольных по частоте гармонических сил на автогенератор с жестким предельным циклом. Получен метод определения областей синхронного режима в зависимости от частот внешних сил и их амплитуды. Приведены результаты численного расчета и дана их физическая интерпретация. Описанный метод легко распространяется на случай, когда спектр внешней силы состоит из произвольного числа равноудаленных составляющих, т. е. на случай воздействия гармонической внешней силой с произвольной периодической модуляцией.

Режимы синхронизации автогенератора внешней силой могут иметь самые различные применения: стабилизация частоты, усиление приходящего сигнала, амплитудное ограничение и т. д. [1]. Возможно использование синхронизованного генератора в качестве активного фильтра [2]. С этой точки зрения представляет интерес задача о воздействии на генератор сигналами сложной формы и ее частный случай — задача о воздействии на генератор двух сравнимых по амплитуде и близких по частоте гармонических сил, т. е. фильтрация простейшего сигнала от сосредоточенной помехи. Уравнение движения в системе для этого случая будет иметь вид

$$\ddot{x} + 2\dot{x}[\delta + S(x)] + \omega_0^2 x = P_1 \cos \omega_1 t + P_2 \cos \omega_2 t. \quad (1)$$

Предположив для простоты, что  $P_1 = P_2 = P$ , можно записать

$$P_1 \cos \omega_1 t + P_2 \cos \omega_2 t = 2P \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Решение для квазилинейного квазигармонического генератора ищется в виде  $x = A(t) \sin[\omega t - \varphi(t)]$ , где  $A$  и  $\varphi$  — медленно меняющиеся функции времени,  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ . Тогда, если  $\left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \right| \ll 1$ , то для системы справедливы следующие укороченные уравнения:

$$\dot{A} = -A[\delta + \bar{S}(A)] + \frac{P}{\omega} \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \varphi \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} - \frac{P}{\omega A} \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \varphi. \quad (3)$$

Если система имеет жесткий предельный цикл [3], т. е. в синхронном режиме  $A = A_0$  равно амплитуде автономных колебаний и не зависит от амплитуды внешнего воздействия, то для описания процессов в системе в стационарном режиме достаточно уравнения (3). Приближение жесткого предельного цикла будет справедливым для любого генератора при достаточно малой (в зависимости от свойств генератора) амплитуде внешней силы.

Введем  $\Delta_0 = \frac{P}{2\omega A_0}$ ,  $\sigma_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta_0}$ ,  $\sigma_2 = \frac{\omega_2 - \omega_0}{\Delta_0}$  и  $t^* = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$  — безразмерное время;  $\Delta_0$  — не что иное, как полуширина полосы синхронизации при гармоническом воздействии. Повернем оси координат на плоскости параметров на  $\pi/4$ ;  $k_1 = \sigma_2 + \sigma_1$ ,  $k_2 = \sigma_2 - \sigma_1$ . Тогда уравнение (3) запишется следующим образом:

$$k_1 \frac{d\varphi}{dt^*} = k_2 + 4 \cos t^* \sin \varphi. \quad (4)$$

Спектр движения в системе определяется зависимостью  $\varphi(t^*)$ . Из физических соображений видно, что возможны следующие случаи.

1. Генератор засинхронизован на одной из частот, расстояния между всеми спектральными составляющими на выходе системы равны между собой и равны  $(\omega_2 - \omega_1)$ . Методика численного определения амплитуд составляющих для этого случая описана в [2].

2. Генератор засинхронизован на частоте  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , являющейся как бы несущей частотой воздействия; расстояния между составляющими спектра равны  $\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)$ . Очевидно, и в первом и во втором случае  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  должны быть периодическими функциями времени.

3. В системе есть несинхронные автоколебания, что возможно, например, если обе частоты воздействия находятся за пределами полосы синхронизации и на разных расстояниях от  $\omega_0$  (в этом случае частота автоколебаний лишь несколько сдвинется от  $\omega_0$  к ближайшей из частот воздействия). При этом  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  должны быть непериодическими функциями времени (видимо, двойко-периодическими, так как результирующий спектр может быть представлен в виде суммы двух эквидистантных спектров).

В данной работе определяются границы областей, соответствующих тому или иному из указанных режимов, на плоскости параметров  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ .

С помощью замены переменной  $\varphi = 2 \operatorname{arctg} u$  уравнение (4) переводится в общее уравнение Рикатти:

$$\frac{du}{dt^*} = \frac{k_2}{2k_1} u^2 + \frac{4}{k_1} u \cos t^* + \frac{k_2}{2k_1}.$$

Это уравнение стандартной заменой [4], имеющей в данном случае вид

$$u = -\frac{2k_1}{k_2} \left( \frac{1}{v} \frac{dv}{dt^*} + \frac{2}{k_1} \cos t^* \right), \quad (5)$$

сводится к уравнению Хилла

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + [\lambda + \Phi(\tau)]v = 0, \quad (6)$$

где

$$\tau = t^* + \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = \left( \frac{k_2}{2k_1} \right)^2 - \frac{2}{k_1^2},$$

$$\Phi(\tau) = 2\varepsilon \cos \tau + 2\varepsilon^2 \cos 2\tau, \quad \varepsilon = \frac{1}{k_1}.$$

В результате сдвига отсчета времени периодический коэффициент в (6) стал четной функцией  $\tau$ , что несколько упростит дальнейшее решение задачи.

Общие свойства уравнения Хилла достаточно хорошо изучены (см., например, [5]). На всей плоскости параметров, за исключением отдельных кривых, нахождение которых и будет нашей целью, уравнение имеет два линейно независимых решения, которые могут быть представлены в виде

$$v_i(\tau) = e^{\alpha_i \tau} \psi_i(\tau), \quad i = 1, 2.$$

где  $\psi_i$  — функции, периодические по  $\tau$  с периодом  $2\pi$ . Для  $\alpha_i$ , согласно общей теории, есть следующие возможности в зависимости от  $\lambda$  и  $\epsilon$ : оба  $\alpha_i$  действительны:  $\alpha_i = \pm a$ ; оба  $\alpha_i$  имеют вид:  $\alpha_i = j\pi \pm a$  ( $a$  — действительно); оба  $\alpha_i$  чисто мнимы:  $\alpha_i = \pm jb$ .

В последнем случае действительное решение уравнения (6) имеет вид

$$v(\tau) = C_1 \cos b\tau \psi_1(\tau) + C_2 \sin b\tau \psi_2(\tau).$$

Легко видеть, что при переходе от  $v$  к  $u$  двойная периодичность сохранится;  $\sin \varphi = \frac{2u}{1+u^2}$  и  $\cos \varphi = \frac{1-u^2}{1+u^2}$  также будут двоякопериодическими функциями  $t^*$ , и, следовательно, в системе есть несинхронные автоколебания.

В первых двух случаях решение можно записать:

$$v(\tau) = C_1 e^{a\tau} \psi_1(\tau) + C_2 e^{-a\tau} \psi_2(\tau),$$

где  $\psi_i$  — периодические функции  $\tau$  с периодом  $2\pi$  (при  $\text{Im } \alpha_i = 0$ ) или  $4\pi$  (при  $\text{Im } \alpha_i = \pi$ ).

Если один из  $C_i$  равен нулю, то  $u$  будет периодической функцией  $t^*$ , и несинхронных автоколебаний в системе нет. Если  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 \neq 0$ , то одним из двух независимых решений можно пренебречь при  $\tau \rightarrow \infty$ , т. е. в стационарном режиме.

Области с периодическими решениями всегда разделены областями с решениями двоякопериодическими. Переходными являются кривые на плоскости  $\lambda, \epsilon$ , для которых  $\alpha_i$  кратны и равны либо 0, либо  $j\pi$ . При этом одно из двух решений уравнения (6) периодически с периодом соответственно либо  $2\pi$ , либо  $4\pi$  (второе решение имеет вид  $v_2(\tau) = C_2 [\tau \psi_1(\tau) + \psi_2(\tau)]$ , где  $\psi_1, \psi_2$  — периодические функции). Так как  $\Phi(\tau)$  четна, то периодические решения на переходных кривых могут быть либо четными, либо нечетными [5]:

$$v = a_0/2 + \sum_n a_n \cos n\tau,$$

$$v = \sum_n b_n \sin n\tau,$$

$$v = a'_0/2 + \sum_n a'_n \cos n \frac{\tau}{2},$$

$$v = \sum_n b'_n \cos n \frac{\tau}{2}.$$

Далее действуем стандартным способом: подставляем каждый из рядов в (6), приравняем нулю сумму коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях, получаем систему линейных однородных уравнений относительно  $a_n$  (или  $a'_n, b_n, b'_n$ ), приравняем ее определитель нулю и получаем уравнение для определения  $\lambda(\epsilon)$  — переходных кривых. Таких определителей будет четыре:

$$\begin{vmatrix} \lambda/2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda - 1 + \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 4 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 9 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 16 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

(v четно, период 2π)

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 - \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda - 4 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 9 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 16 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 25 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

(v нечетно, период 2π)

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1/4 + \varepsilon & \varepsilon + \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ \varepsilon + \varepsilon^2 & \lambda - 9/4 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 25/4 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 49/4 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 81/4 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

(v четно, период 4π)

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1/4 - \varepsilon & \varepsilon - \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ \varepsilon - \varepsilon^2 & \lambda - 9/4 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 25/4 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 49/4 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \lambda - 81/4 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

(v нечетно, период 4π)

При счете определители были ограничены десятым порядком, а первый из них параллельно считался в одиннадцатом порядке для контроля за влиянием ограничения порядка на точность определения корней.

Умножив элементы всех определителей на  $-1$ , а первую строку и первый столбец в (7) дополнительно на  $\sqrt{2}$ , получим задачи на определение собственных значений эрмитовых матриц. Из уравнения (6) видно, что замена  $k_{1,2}$  на  $-k_{1,2}$  ничего не изменит: заменив  $k_1$  на  $-k_1$  и сдвинув отсчет времени на  $\pi$ , мы получим то же самое уравнение; следовательно для полного исследования задачи достаточно просчитать один квадрант. Значения  $k_1$  задавались от 0 до 2,5 с шагом 0,1 и по соответствующей стандартной программе считались  $\lambda$  и  $k_2$ .

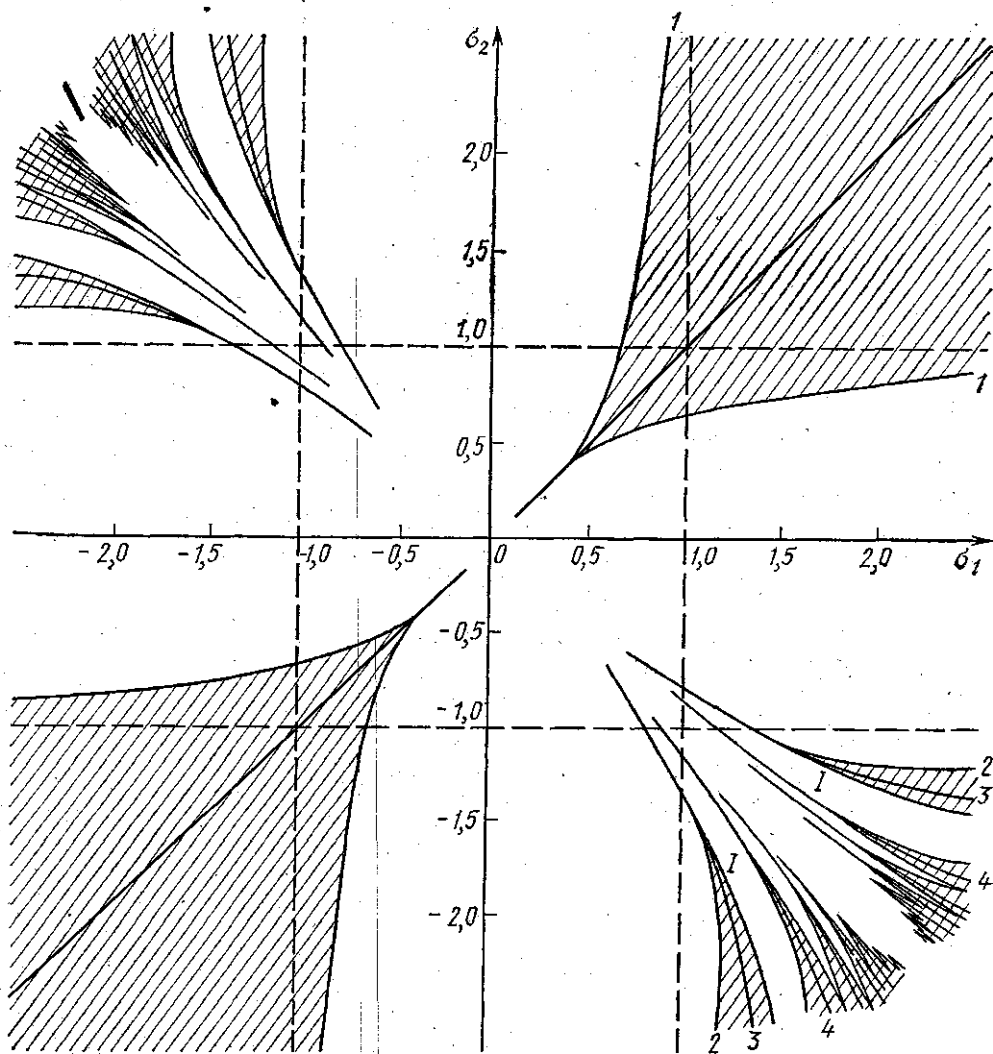
Ограничение порядка определителей сказалось лишь в области  $|k_1| \leq 0,1$  ( $\sigma_1 \simeq -\sigma_2$ ). Уже при  $k_1 = 0,2$  точность определения первых трех корней уравнения (7) (относительно  $k_2$ ) выше  $10^{-3}$ , а при  $k_1 \geq 0,5$  с той же точностью определяется 7—8 корней — более чем достаточно.

Результаты приведены на рисунке. Заштрихованы области несинхронного режима. Они, как следует из вышеизложенного, должны быть ограничены кривыми, полученными из решений  $v$  различной периодичности. Пунктирными прямыми  $\sigma_1 = \pm 1$ ,  $\sigma_2 = \pm 1$  ограничены области синхронного режима при одночастотном воздействии.

Наименьшее решение уравнения (7)  $k_2^{(1)}(k_1)$  и соответственно  $-k_2^{(1)}(k_1)$  ограничивают область синхронизации на частоте  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , однако  $k_2^{(1)} < 10^{-4}$

при всех  $k_1$  и эта область практически не обнаружима (оба решения обозначены на рисунке прямой  $\sigma_1 = \sigma_2$ ).

Область между кривыми 1 при  $|\sigma_1| < 1$ ,  $|\sigma_2| < 1$  описывает явление «пересинхронизации», отмеченное в [2], т. е. появление в системе несинхронных автоколебаний при  $\omega_1 - \omega_0 \simeq \omega_0 - \omega_2$ . Далее видно, что полоса синхронизации одним сигналом может как расширяться при подаче на систему второго сигнала вдали от  $\omega_0$ , если он расположен с



той же стороны от  $\omega_0$ , что и первый (кривые 2), так и сузиться, если второй сигнал расположен с другой стороны (кривые 1).

Все, кроме  $k_2^{(1)}$ , решения уравнений (7) и (8) совпадают с точностью выше  $10^{-4}$  и обозначены слившимися кривыми (3, 4 и т. д.). Области периодического режима, которые должны находиться между этими практически совпадающими решениями, математически соответствуют синхронизации на частотах, равных полусуммам соседних комбинационных (относительно  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) частот, однако с физической точки зрения это, безусловно, фикция.

Область I и ей подобные соответствуют синхронизации на комбинационных составляющих — можно показать, что при  $|\sigma_1|, |\sigma_2| \rightarrow \infty$  эти области вырождаются в прямые  $n(\omega_i - \omega_k) = \omega_k - \omega_0$ ,  $n = 1, 2, \dots, i, k = 1, 2$ .

При достаточно больших  $|\sigma_1|$  и  $|\sigma_2|$  области синхронизации на разных комбинационных частотах разделены областями несинхронного режима. Последние при уменьшении абсолютных значений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  стягиваются в линии, и переход от синхронизации, например, на частоте  $\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2$  к синхронизации на частоте  $\omega_1$  будет заключаться только в перераспределении энергии — плавном увеличении амплитуды  $A_{\omega_1}$  и уменьшении  $A_{\omega_3}$ . Однако линии, разделяющие эти области, сохраняют смысл: при постоянной расстройке  $\sigma_i$  максимум  $A_{\omega_3}$  ( $\sigma_k$ ) будет достигаться в области, соответствующей синхронизации на  $\omega_3$ . Например, при  $-\sigma_2 = \frac{\omega_2 - \omega_0}{\Delta_0} = 1$  амплитуда  $A_{\omega_3}$  будет максимальна, если  $\sigma_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta_0} \simeq 0,85$  и соответственно  $\sigma_3 = \frac{\omega_3 - \omega_0}{\Delta_0} \simeq 0,70$ , а не тогда, когда  $\omega_3 = \omega_0$ , как можно было бы ожидать.

Описанный метод можно без принципиальных изменений применять для исследования задачи о воздействии на автогенератор с жестким предельным циклом сигналом с произвольной периодической модуляцией.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кигокава К. «Прогр. IEEE», 1973, 61, N 10.
2. Иванов А. В., Минакова И. И., Федосеев А. Г. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1975, 16, № 4.
3. Мигулин В. В., Коваленко А. С. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1971, 12, № 3.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976.
5. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., 1953.

Поступила в редакцию  
17.9. 1976 г.  
Кафедра  
физики колебаний