

УДК 621.375.7; 621.382

**В. Н. Дамгов**  
(Болгария)**ВЛИЯНИЕ ВЫСШИХ ГАРМОНИК  
НА НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС**

Получены соотношения, учитывающие влияние высших гармонических составляющих на амплитуду основной частоты нелинейного резонанса.

В расчетах нелинейного резонанса обычно ограничиваются учетом только первой гармоники. В настоящей работе рассмотрено влияние высших гармонических составляющих на величину первой гармоники при нелинейном резонансе и, в частности, при использовании в качестве нелинейного элемента  $p$ - $n$ -перехода полупроводникового диода в режиме наличия небольших прямых токов [1]. Такой режим имеет место, если полупроводниковый диод работает с автоматическим смещением. Расчет проведен методом эквивалентной линеаризации [2] с учетом высших приближений.

Пусть имеется резонансная система, содержащая нелинейный емкостной элемент с вольткулоновой характеристикой

$$q = f(\mathcal{U}). \quad (1)$$

Если параметры системы таковы, что в ней возбуждаются периодические колебания, близкие к гармоническим, то в первом приближении напряжение на нелинейном емкостном элементе можем выразить как

$$\mathcal{U} = U \cos \omega t - \mathcal{U}_0, \quad (2)$$

(начальную фазу здесь и везде в дальнейшем принимаем равной нулю). Подставляя (2) в (1) и разложив в ряд Фурье, получим

$$q = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\omega t, \quad (3)$$

где

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathcal{U}) d\omega t, \quad Q_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathcal{U}) \cos n\omega t d\omega t.$$

Эффективную емкость системы в первом приближении можем определить как

$$C_{\text{эфф}} = \frac{Q_1}{U}.$$

Для определения второго приближения поступим следующим образом. С учетом (3) можно уточнить выражение для напряжения на емкостном элементе

$$\mathcal{U}_{II} = U \cos \omega t - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{dq_n}{dt} Z(n\omega) - \mathcal{U}_0, \quad (4)$$

где  $Z(n\omega)$  — импеданс всей остальной (линейной) части резонансной системы.

Отсюда вытекает критерий применимости излагаемого метода. В достаточно добротной системе член  $U \cos \omega t$  будет основным среди переменных составляющих, а остальные лишь поправочными. Поэтому для применимости метода существует достаточное условие

$$n\omega Q_n |Z(n\omega)| \ll U \quad (n = 2, 3 \dots). \quad (5)$$

Теперь воспользуемся выражением (4) для уточнения функциональной зависимости (1) при условии (2).

Имеем

$$q_{II} = f(\mathcal{U} - \xi). \quad (6)$$

где

$$\xi = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{dq_n}{dt} Z(n\omega),$$

но, так как  $\xi$  должно быть мало по сравнению с членом  $U \cos \omega t$ , то заряд  $q_{II}$  будет приближенно равен

$$q_{II} \cong f(\mathcal{U}) - \xi f'(\mathcal{U}), \quad (7)$$

где  $f'(\mathcal{U})$  — производная от функции заряда (1) по напряжению  $U$  при

$$\mathcal{U} = U \cos \omega t - \mathcal{U}_0.$$

Разлагая в ряд Фурье,  $f'(\mathcal{U})$  можем выразить следующим образом

$$f'(\mathcal{U}) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t, \quad (8)$$

откуда получаем

$$\xi f'(\mathcal{U}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{dq_n}{dt} Z(n\omega) \left[ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t \right]. \quad (9)$$

Выражение (9) можем переписать еще так:

$$\xi f'(\mathcal{U}) = \sum_{n=2}^{\infty} I_n |Z(n\omega)| [\sin n\omega t + \varphi(n\omega)] \left[ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t \right], \quad (10)$$

где

$$I_n = n\omega Q_n, \quad (11)$$

$|Z(n\omega)|$  и  $\varphi(n\omega)$  — модуль и фаза импеданса линейной части резонансной системы.

После несложных преобразований выражение (10) можем представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi f'(\mathcal{U}) = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} I_{n+k} A_n |Z[(n+k)\omega]| \sin [\varphi(n+k)\omega] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} I_n A_{n+k} |Z(n\omega)| \sin [\varphi(n\omega)] \right\} \cos k\omega t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} I_{n+k} A_n |Z[(n+k)\omega]| \cos[\varphi(n+k)\omega] - \right. \\
 & \left. - \sum_{n=2}^{\infty} I_n A_{n+k} |Z(n\omega)| \cos[\varphi(n\omega)] \right\} \sin k\omega t + \text{гармоники}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Теперь можем определить эффективную емкость резонансной нелинейной системы во втором приближении. Пользуясь определением эффективной емкости в виде отношения амплитуды первой гармоники заряда к амплитуде переменного напряжения на емкостном элементе и замечая (12), что добавок к гармонике заряда основной частоты имеется при индексе суммирования  $k=1$ , с учетом (3) получим

$$C_{\text{эфф}} = \frac{1}{U} \sqrt{F^2 + G^2}, \quad (13)$$

где

$$F = Q_1 - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} I_n |Z(n\omega)| \sin \varphi(n\omega) (A_{n-1} + A_{n+1}), \quad (14)$$

$$G = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} I_n |Z(n\omega)| \cos \varphi(n\omega) (A_{n-1} - A_{n+1}). \quad (15)$$

Из выражений (13) и (12) следует, что влияние высших гармоник емкостного тока выражается в том, что эффективная емкость системы становится комплексной величиной,

$$\varphi_{C_{\text{эфф}}} = \text{arctg} \frac{G}{F}, \quad (16)$$

хотя нелинейный элемент в системе считается чисто емкостным, без потерь в нем. Нелинейный элемент «перекачивает» энергию с основного тона на высшие гармоники, как бы являясь генератором гармоник, и во втором приближении это учитывается. Реакция системы с учетом активных потерь на частотах высших гармоник заключается в обратном воздействии на эффективный параметр системы, выражаемом в появлении фазы у эффективной емкости. Из выражения (16) с учетом (14) и (15) можно видеть, что в реальных системах всегда выполняется условие  $\varphi_{C_{\text{эфф}}} > 0$ .

Чтобы получить представление о влиянии  $\varphi_{C_{\text{эфф}}}$  на резонансные свойства, т. е. для построения уравнения второго приближения, необходимо несколько конкретизировать рассматриваемую систему.

Для последовательного контура, содержащего нелинейный емкостной элемент, индуктивность  $L$  и сопротивление  $r$  с учетом условий эквивалентной линеаризации, можем записать следующие уравнения:

$$\begin{cases}
 j\omega L I_m e^{i\varphi_1} + r I_m e^{i\varphi_1} + U e^{i\varphi} = U_m, \\
 I_m e^{i\varphi_1} = j\omega U e^{i\varphi} |C_{\text{эфф}}| e^{i\varphi_{C_{\text{эфф}}}}.
 \end{cases}$$

Из них можем определить амплитуду и фазу напряжения на контуре во втором приближении:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{(\cos \varphi_{C_{\text{эфф}}} - \omega^2 L |C_{\text{эфф}}|)^2 + (\omega r |C_{\text{эфф}}| - \sin \varphi_{C_{\text{эфф}}})^2}}, \quad (17)$$

$$\varphi = - \text{arctg} \frac{\omega r |C_{\text{эфф}}| - \sin \varphi_{C_{\text{эфф}}}}{\cos \varphi_{C_{\text{эфф}}} - \omega^2 L |C_{\text{эфф}}|} - \varphi_{C_{\text{эфф}}}. \quad (18)$$

Пользуясь вышеизложенной методикой, найдем расчетные соотношения для эффективной емкости в случае использования в качестве нелинейного конденсатора  $p$ — $n$ -перехода полупроводников диода.

Расчеты проведем для случая автоматической подачи смещения на диод при помощи  $RC$  цепи (рис. 1), при этом учтем влияние как барьерной, так и диффузионной емкости.

Напряжение на диоде можем представить в следующем виде:

$$U_d = -U_{d_0} + U_d \cos \omega t, \quad (19)$$

а заряд на  $p$ — $n$ -переходе при этом запишется

$$q = \frac{C_{(0)} \Phi_k^\gamma (\Phi_k + U_{d_0})^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{U_d \cos \omega t}{\Phi_k + U_{d_0}} \right)^{1-\gamma} \right] + \frac{C_d}{\alpha} (e^{-\alpha U_{d_0}} e^{\alpha U_d \cos \omega t} - 1), \quad (20)$$

где  $C_{(0)}$  — барьерная емкость  $p$ — $n$ -перехода при нулевом внешнем напряжении,  $\alpha = \frac{q}{kT}$ ,  $C_d = \frac{qI_s}{kT} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{2V} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2 + 1}}$ ,  $\gamma$  — параметр, зависящий от распределения примесей в  $p$ — $n$ -переходе.

Из (20) для амплитуд  $Q_n$  гармоник заряда получим следующее выражение:

$$Q_n = \frac{U_d}{n} (C_{n-1} - C_{n+1}) + \frac{2C_d}{\alpha} e^{-\alpha U_{d_0}} J_n(\alpha U_d), \quad (n = 1, 2 \dots), \quad (21)$$

где  $C_n$  — коэффициенты Фурье разложения барьерной емкости

$$C_n = \frac{C_{(0)}}{2\pi} (\Phi_k + U_{d_0})^{-\gamma} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 - \frac{U_d}{\Phi_k + U_{d_0}} \cos \omega t \right)^{-\gamma} \cos n \omega t d\omega t, \quad (n = 0, 1, 2 \dots), \quad (22)$$

$J_n(\alpha U_d)$  — модифицированные функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка (обычно в литературе приняты обозначения  $I_n(x)$ , но символ  $I_n$  нами использован для обозначения амплитуд гармоник тока (10)).

Амплитуды гармоник тока  $|I_n|$  определяем из (11) с учетом (21).

Для расчета  $C_{эфф}$  контура остались нераскрытыми только коэффициенты  $A_n$  в (8). Первая производная от функции заряда (1) с учетом (20) представляет собой сумму барьерной и диффузионной емкости  $p$ — $n$ -перехода. Раскладывая в ряд по гармоникам, получим

$$f'(-U_{d_0} + U_d \cos \omega t) = C_0 + C_d e^{-\alpha U_{d_0}} J_0(\alpha U_d) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [C_n + C_d e^{-\alpha U_{d_0}} J_n(\alpha U_d)], \quad (23)$$

т. е.

$$A_0 = C_0 + C_d e^{-\alpha U_{d_0}} J_0(\alpha U_d), \quad A_n = 2 [C_n + C_d e^{-\alpha U_{d_0}} J_n(\alpha U_d)]. \quad (24)$$

Теперь все коэффициенты раскрыты и, подставляя их в выражения (13), (17) и (18), можно изучать колебательный процесс в контуре с учетом влияния обертонов.

На рис. 2 представлены результаты машинного расчета эффективной емкости  $C_{эфф}$  контура с полупроводниковым диодом в режиме авто-

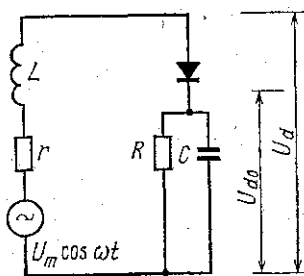


Рис. 1. Схема автоматической подачи смещения

смещения без учета влияния высших гармоник и с учетом влияния второй и третьей гармоники для четырех различных значений добротности контура.

На рис. 3 представлена зависимость фазы эффективной емкости  $\varphi_{C_{эфф}}$  от амплитуды напряжения на контуре.

При расчетах исходили из конкретных данных электрофизических параметров полупроводникового диода Д-208. Коэффициенты  $C_n$  (22), как известно, выражаются через эллиптические интегралы, рассчитывались они с использованием графиков из [3]. Напряжение смещения на полупроводниковом диоде определялось из трансцендентного уравнения

$$U_{d_0} = R_d I_s e^{-\alpha U_{d_0}} [J_0(\alpha U_d) - 1].$$

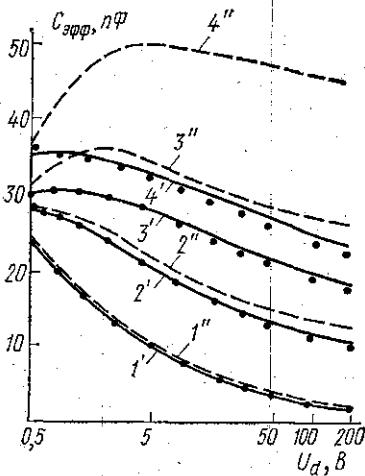


Рис. 2. Зависимость эффективной емкости от амплитуды напряжения на контуре без учета влияния высших гармоник (пунктирные линии) и с учетом влияния второй и третьей гармоники (сплошные линии): 1', 1'' — 50; 2', 2'' — 30, 3', 3'' — 15; 4', 4'' — 9. Точками отмечены экспериментальные данные измерения эффективной емкости

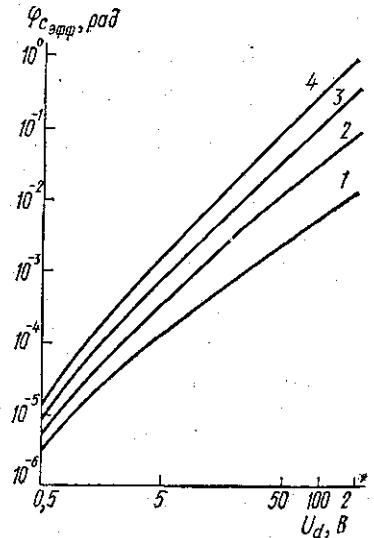


Рис. 3. Зависимость фазы эффективной емкости от амплитуды напряжения на контуре для четырех значений добротности: 1 — 50; 2 — 30; 3 — 15; 4 — 9

В расчетах принималось во внимание шунтирующее действие активного сопротивления  $p-n$ -перехода, поэтому к линейной части контура относили также его эффективную величину, выражаемую как

$$R_{эфф} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{1 + (n\omega\tau)^2} + 1}} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{U_d}{U_{d_0}} \cdot \frac{J_0(\alpha U_d)}{J_1(\alpha U_d)}.$$

Расчеты проведены для частот  $\omega\tau \ll 1$ , где  $\tau$  — время жизни основных носителей в области базы. На частотах  $\omega\tau \gg 1$ , на которых существенное влияние оказывает инерционность процессов в полупроводниковом диоде, необходимо учитывать частотную характеристику выпрямления и влияние эффекта накопления стационарного заряда основных носителей в базе диода [4].

На рис. 2 точками отмечены экспериментальные данные измерения эффективной емкости.

Из анализа графиков рис. 2 можем сделать основные выводы.

1. При больших добротностях контура ( $Q > 30$ ) влияние высших гармоник на эффективный параметр незначительно и количественный анализ колебательных процессов при нелинейном резонансе можно проводить с учетом только основного тона.

2. С уменьшением добротности влияние обертонов приводит к значительному снижению величин эффективной емкости по сравнению с расчетными значениями по первой гармонике и их учет необходим.

В заключение следует еще раз подчеркнуть, что предложенная методика получения уравнений высших приближений на базе метода эквивалентной линеаризации позволяет проводить достаточно точное количественное изучение резонансных явлений в нелинейных системах. Второе приближение выявило комплексный характер эффективного параметра резонансной системы с нелинейным емкостным элементом, что является отражением влияния активных потерь на частотах высших гармоник. В применении к контуру с полупроводниковым диодом в режиме автосмещения предложенная методика позволила получить качественное и количественное совпадение расчетных и экспериментальных результатов.

Автор выражает признательность проф. М. Д. Карасеву за оказанную помощь при выполнении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дамгов В. Н., Карасев М. Д., Соколов Г. Е. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1976, 17, № 6.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.
3. Белов А. А., Карасев М. Д. «Вопросы радиоэлектроники», 1965, № 7.
4. Ржевкин К. С., Царев Н. М. «Изв. вузов. Радиоэлектроника», 1975, 18, № 5.

Поступила в редакцию  
7.12. 1976 г.  
Кафедра  
физики колебаний