УДК 517.91/943

Г. Н. Медведев
Б. И. Моргунов

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Постановка задачи. Рассматривается система интегродифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\dot{x}=\varepsilon X\left[x(t),\ x(t-\Delta),\quad \int\limits_0^t f(x(s),\quad x(s-\Delta),\quad s,\ t)\,ds,\ t,\ \varepsilon\right], \tag{1}$$

где $\varepsilon>0$ — малый параметр, $\Delta>0$ (запаздывание) — фиксированная постоянная величина.

Схема усреднения для уравнений (1) была разработана и обоснована в работах А. Н. Филатова [1, 2]. Обоснованию принципа усреднения в более общих, чем (1), системах посвящены работы В. В. Стрыгина [3].

В работе [1] разработаны схемы усреднения систем (1) в первом приближении по степеням малого параметра ε. Согласно [1] системе (1) может быть поставлена в соответствие усредненная система первого приближения

$$\dot{\xi}=\varepsilon\overline{X}_1(\xi), \tag{2}$$

где

$$\overline{X}_1(\xi)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T W_1\left(\xi,\ \xi,\ \int\limits_0^t f(\xi,\ \xi,\ s,\ t)\,ds,\ t\right)dt, \tag{3}$$

$$X_1\equiv X|_{\varepsilon=0}.$$

При выполнении некоторых условий гладкости функций X и f решения систем (1) и (2) близки на асимптотически большом интервале времени порядка $1/\varepsilon$.

В настоящей статье разработан и обоснован алгоритм построения высших приближений решений системы (1) с помощью метода усреднения.

Основные результаты. Для построения высших приближений решений системы (1), следуя [4], рассмотрим замену переменных следующего вида:

$$x=\xi+\varepsilon u_1(\xi,\ t)+\varepsilon^2 u_2(\xi,\ t)+\dots, \tag{4}$$

где ξ — решение усредненной системы

$$\dot{\xi}=\varepsilon\overline{X}_1(\varepsilon)+\varepsilon^2 A_2(\xi)+\dots \tag{5}$$

Если в правых частях (5) ограничиться членами порядка ε^2, получим усредненную систему второго приближения. Ее решение будет вторым приближением для решений системы (5). Подставляя его в (4) и отбрасывая члены порядка ε^2, получим второе приближение для решений системы (1).

Сформулируем основные требования теоремы о втором приближении.

Функции $X(x,\ y,\ z,\ t,\ \varepsilon)$ и $f(x,\ y,\ s,\ t)$ определены, непрерывны и равномерно ограничены в некоторых областях вместе с частными производными по всем аргументам до второго порядка включительно. Кроме того, выполнены условия

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y,\ s,\ t)\right|\leqslant\mu(t,\ s),\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y,\ s,\ t)\right|\leqslant\mu(t,\ s),$$

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau\mu(\tau,\ s)\,ds\leqslant Ct, \tag{6}$$

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau\mu(\tau,\ s)\,|s-\tau|\,ds\leqslant t^2\psi(t),\quad \psi(t)\to 0,\quad t\to\infty.$$

Равномерно по отношению к ξ в некоторой области переменных x существуют пределы — средние значения вида (3) для ряда известных функций правых частей системы (1).

На сегменте $[0, L/\varepsilon]$, где L — сколь угодно большое положительное число, существует единственное решение усредненной системы второго приближения.

При соблюдении этих условий равномерно в промежутке $[0, L/\varepsilon]$ выполняется оценка

$$|x - \xi - \varepsilon u_1(\xi, t)| = 0(\varepsilon),$$

где ξ — решение усредненной системы второго приближения, совпадающее при $t=0$ с решением системы (1), а

$$u_1(\varepsilon, t) = \int_0^\tau \left[X_1\left(\xi, \xi, \int_0^\tau f(\xi, \xi, s, \tau)\, ds, \tau\right) - \overline{X}_1(\xi)\right] d\tau.$$

В аналогичных терминах с более жесткими требованиями, в том числе и к функции $\mu(t, s)$ в условиях (6), формулируются теоремы о высших приближениях.

В качестве примера рассмотрим упругую неограниченную струну с плотностью ρ и натяжением T $(T \sim \rho \gg 1)$. В точках струны x_1 и x_2 прикреплены осцилляторы, выполненные из вязкоупругого материала, с массами m_1, m_2, упругими постоянными C_1, c_2 и ядрами релаксации εR_1, εR_2 $(\varepsilon \ll 1)$. На осцилляторы действуют малые диссипативные силы $\varepsilon m_j a_j sgn \dot{q}_j$ $(j=1, 2$, q_j, $\dot{q}_j$ — координата и скорость j-го осциллятора). Следуя [5], заменим волновые связи между осцилляторами в описанной системе на связи с запаздыванием. В результате придем к следующей системе уравнений, описывающих колебания осцилляторов:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \varepsilon \omega_j^2 \int_0^t R_j(t-s)\, q_j(s)\, ds + \varepsilon a_j \dot{q}_j - \varepsilon b \sum_{k=1}^{2} C_k \dot{q}_k(t - \tau_{jk}), \tag{7}$$

$$\omega_j^2 = \frac{c_j}{m_j}, \qquad \varepsilon b = \frac{1}{2\sqrt{T\rho}}, \qquad \tau_{jk} = \sqrt{\frac{\rho}{T}}\, \frac{1}{|x_k - x_j|}.$$

Переходя в системе (7) от переменных q_j, $\dot{q}_j$ к амплитудам F_j и начальным фазам колебаний θ_j, приведем систему (7) к виду (1).

Усреднение получающихся уравнений в первом приближении по ε позволяет получить усредненные уравнения для F_j и θ_j. Интегрирование усредненных уравнений позволяет получить приближенное решение системы (7):

$$q_j(t, \varepsilon) = \left[F_j(0) \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}(\pi b c_j + \omega_j I_{sj})\, t\right\} + \frac{4a_j}{\omega_j(\pi b c_j + \omega_j I_{sj})} \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 - \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}(\pi b c_j + \omega_j I_{sj})\, t\right\}\right)\right] \cos\left\{\omega_j\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} I_{cj}\right) t + \theta_j(0)\right\}. \tag{8}$$

В (8) I_{sj}, I_{cj} — соответственно синус- и косинус-Фурье-образы ядра R_j $(j=1, 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филатов А. Н. Усреднение в системах дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Ташкент, 1967.
2. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент, 1971.
3. Стрыгин В. В. «Укр. матем. журнал», 1970, **22**, № 4, 503—513.
4. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
5. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., 1969.

Поступила в редакцию
6.7 1976 г.

Кафедра математики