УДК 521.21/24

Ю. В. Баркин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ ШАРА

Исследуется интегрируемость различных схем усреднения дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения осесимметричного твердого тела в поле притяжения шара, записанных в канонических переменных Делоне — Андуайе. Схемы усреднения Гаусса и Моисеева порождают уравнения, которые интегрируются в случае пространственного движения тел. Схемы усреднения Фату и Делоне — Хилла проинтегрированы лишь в случае плоского поступательно-вращательного движения тел. Для каждой интегрируемой схемы усреднения проводится операция обращения первых интегралов.

Задачу о поступательно-вращательном движении двух твердых тел не удается проинтегрировать до конца в известных функциях. Поэтому ее изучение производится приближенными аналитическими методами.

Первые результаты в этой области принадлежат Кондурарю [1, 2]. Им была развита теория приближенного интегрирования дифференциальных уравнений движения сфероида под действием притяжения шара, в которой решение представлялось в виде рядов по степеням малого параметра, характеризующего отклонение динамического строения сфероида от шара. Lanzano исследовал поступательно-вращательное движение двух однородных сфероидов. В его работе была построена аналитическая теория движения, в которой решение представлялось в виде рядов, расположенных по степеням меридиальных эксцентриситетов сфероидов и эксцентриситета орбиты [3, 4].

В работах Кондураря и Lanzano использовались уравнения движения в обобщенных координатах Лагранжа, различные формы которых в общей постановке задачи n-тел получены Дубошиным [5].

Возможности применения новых аналитических методов для изучения поступательно-вращательного движения небесных тел открываются при использовании уравнений движения в оскулирующих элементах [6], основанных на невозмущенном движении, в котором центры инерции тел движутся по кеплеровским орбитам, вращаясь относительно собственных центров масс, как осесимметричные тела по законам Эйлера.

В работе Kinoshyta [7] подобным методом исследовалось поступательно-вращательное движение трехосного твердого тела в поле притяжения шара. Первое приближение возмущенного движения тел строилось методом Хори — Ли.

Методы усреднения успешно применялись к различным задачам небесной механики и приобрели особое значение в связи с их математическим обоснованием и развитием теории возмущений Крылова — Боголюбова и ее различных вариантов [8, 9].

В настоящей работе изучается интегрируемость различных схем усреднения для задачи о поступательно-вращательном движении осесимметричного тела в поле притяжения шара. Движение тел описывается уравнениями в канонических оскулирующих элементах Делоне — Андуайе.

Показано, что схема Гаусса, для которой усреднение производится по всем быстрым переменным задачи, является интегрируемой.

Для схемы усреднения Моисеева усреднение производится по средней аномалии орбитального движения. В работе доказана интегрируемость этой схемы усреднения в пространственном случае движения.

Схема Фату, когда усреднение производится по углу прецессии, порождает интегрируемую систему дифференциальных уравнений лишь в случае плоского движения тел.

Наконец, схема усреднения Делоне — Хилла является интегрируемой также в случае плоского поступательно-вращательного движения тел.

Для каждой интегрируемой схемы усреднения строится полная система первых интегралов и рассматривается операция их обращения.

§ 1. Уравнения движения в элементах Делоне — Андуайе

В работе [6] получены уравнения поступательно-вращательного движения n твердых тел в канонических оскулирующих элементах Делоне — Андуайе. Уравнения, описывающие поступательно-вращательное движение осесимметричного твердого тела в поле притяжения шара, получаются как частный случай из результатов [6] и имеют следующий вид:

$$\frac{d(L,\ G,\ H,\ L_1,\ G_1,\ H_1)}{dt}=\frac{\partial F}{\partial(l,\ g,\ h,\ l_1,\ g_1,\ h_1)},\qquad(1)$$

$$\frac{d(l,\ g,\ h,\ l_1,\ g_1,\ h_1)}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial(L,\ G,\ H,\ L_1,\ G_1,\ H_1)},$$

где F — характеристическая функция, определяемая формулой

$$F=\frac{\mu^2 m^3}{2L^2}-\frac{G_1^2}{2A}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L_1^2+\qquad(2)$$

$$+\Sigma f_{k_1,k_2,k_3,k_4}(L,\ G,\ H,\ L_1,\ G_1,\ H_1)\cos\left[k_1 l+k_2 g+k_3(h_1-h)+h_4 g\right],$$

где A, C — главные центральные моменты инерции осесимметричного тела, μ, m — постоянные величины, связанные с соответствующими массами тел m_0, m_1 формулами:

$$m=\frac{m_0 m_1}{m_0+m_1},\quad \mu=f(m_0+m_1),$$

f_{k_1,k_2,k_3,k_4} — коэффициенты ряда Фурье возмущающей функции. В настоящей работе мы ограничимся общим выражением функции (2) (некоторые из основных коэффициентов разложения F приведены в работе [10]).

Уравнения (1) допускают пять первых интегралов [10]:

$$F=C_1,\qquad(3)$$

$$\sqrt{G^2-H^2}\cos h+\sqrt{G_1^2-H_1^2}\cos h_1=C_2,\qquad(4)$$

$$\sqrt{G^2-H^2}\sin h+\sqrt{G_1^2-H_1^2}\sin h_1=C_3,\qquad(5)$$

$$H + H_1 = C_4, \tag{6}$$

$$L_1 = C_5, \tag{7}$$

где C_i $(i=1, 2, ..., 5)$ — произвольные постоянные.

Выберем теперь в качестве основной плоскости неизменяемую плоскость Лапласа, для которой $C_2=C_3=0$, $C_4=C$, тогда интегралы (4)—(6) примут вид:

$$H = \frac{c}{2} + \frac{1}{2c}(G^2 - G_1^2), \quad H_1 = \frac{c}{2} - \frac{1}{2c}(G^2 - G_1^2), \tag{8}$$

$$h_1 - h = \pi \tag{9}$$

Используя формулы (7), (8) и (9), понизим порядок исходных уравнений на шесть единиц. Для этого введем для переменных G, G_1 новые обозначения $\Gamma = G$, $\Gamma_1 = G_1$. Тогда уравнения движения, сохраняя канонический вид, запишутся следующим образом [10]:

$$\frac{d(L, \Gamma, \Gamma_1)}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial (l, g, g_1)}, \quad \frac{d(l, g, g_1)}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial (L, \Gamma, \Gamma_1)}, \tag{10}$$

где

$$\Phi = \frac{\mu^2 m^3}{2L^2} - \frac{\Gamma_1^2}{2A} + \Sigma \varphi_{k_1,k_2,k_3}(L, \Gamma, \Gamma_1)\cos(k_1 l + k_2 g + k_3 g_1). \tag{11}$$

После интегрирования уравнений (10) переменные L_1, H, H_1, h_1 вычисляются по формулам (7), (8), (9), а переменные l_1, h определяются квадратурами:

$$l_1 - l_1^0 = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial L_1} dt, \quad h - h_0 = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial H} dt, \tag{12}$$

где l_1^0, h_0 — постоянные интегрирования.

Уравнения (10) допускают лишь один первый интеграл

$$\Phi = C_1 = \mathrm{const}, \tag{13}$$

поэтому проинтегрировать систему (10) в конечном виде не удается.

Сделаем предположение, что распределение плотностей тела близко к концентрическому, а форма тела близка к сфере. Тогда в разложении (11) все коэффициенты φ_{k_1,k_2,k_3} малы по сравнению с основной частью характеристической функции Φ. При этом условии среди переменных L, Γ, Γ_1, l, g, g_1 различаются быстрые и медленные переменные, а сама система уравнений приводится к стандартному виду, для которого разработаны методы усреднения [8, 9].

Уравнения (10) образуют двухчастотную систему, поэтому мы рассмотрим все возможные способы усреднения этих уравнений, основываясь на классификации, данной Гребениковым [9].

§ 2. Схема Гаусса

Согласно этой схеме усреднение производится по всем быстрым переменным задачи. В нашем случае по l и g_1. Усредненные уравнения принимают вид:

$$\frac{d(\overline{L},\ \overline{\Gamma},\ \overline{\Gamma}_1)}{dt}=0,\quad \frac{d\overline{l}}{dt}=-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{L}}=n_1,$$

$$\frac{d\overline{g}}{dt}=-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\Gamma}}=n_2,\quad \frac{d\overline{g}_1}{dt}=-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\Gamma}_1}=n_3, \tag{14}$$

где

$$\overline{\Phi}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\,dl\,dg_1=\frac{\mu^2m^3}{2\overline{L}^2}-\frac{\overline{\Gamma}_1^2}{2A}+\varphi_{0,0,0}(\overline{L},\overline{\Gamma},\overline{\Gamma}_1), \tag{15}$$

черточка означает, что элементы соответствуют промежуточному движению (соответствующей схеме усреднения).

Уравнения (14) легко интегрируются:

$$\overline{L}=C_1,\ \overline{\Gamma}=C_2,\ \overline{\Gamma}_1=C_3, \tag{16}$$

$$\overline{l}=n_1\cdot t+l_0,\quad \overline{g}=n_2\cdot t+g_0,\quad \overline{g}_1=n_3\cdot t+g_1^0.$$

Здесь $C_1, C_2, C_3, l_0, g_0, g_1^0$ — полный набор независимых постоянных интегрирования.

§ 3. Схема усреднения Моисеева

Для этого варианта производится однократное усреднение

$$\overline{\Phi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\,dl=\frac{\mu^2m^3}{2\overline{L}^2}-\frac{\overline{\Gamma}_1^2}{2A}+\Sigma\,\varphi_{0,0,k_3}(\overline{L},\overline{\Gamma},\overline{\Gamma}_1)\cos(k_3\overline{g}_1). \tag{17}$$

Усредненные уравнения принимают вид:

$$\frac{d\overline{L}}{dt}=0,\quad \frac{d\overline{\Gamma}}{dt}=0,\quad \frac{d\overline{\Gamma}_1}{dt}=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{g}_1},$$

$$\frac{d\overline{l}}{dt}=-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{L}},\quad \frac{d\overline{g}}{dt}=-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\Gamma}},\quad \frac{d\overline{g}_1}{dt}=-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\Gamma}_1}. \tag{18}$$

Уравнения (18) обладают полной системой первых интегралов:

$$\overline{L}=C_1,\quad \overline{\Gamma}=C_2,\ \overline{\Phi}=C_3, \tag{19}$$

$$l-l_0=-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{L}}dt;\quad \overline{g}-g_0=-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\Gamma}}dt,\ \overline{g}_1-g_1^0=-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\Gamma}_1}dt, \tag{20}$$

где $C_1, C_2, C_3, l_0, g_0, g_1^0$ — постоянные интегрирования.

Используя интеграл

$$\frac{\mu^2m^3}{2\overline{L}^2}-\frac{\overline{\Gamma}_1^2}{2A}+\Sigma\,\varphi_{0,0,k_3}(\overline{L},\overline{\Gamma},\overline{\Gamma}_1)\cos(k_3\overline{g}_1)=C_3, \tag{21}$$

$\overline{\Gamma}_1$ представим функцией $\overline{g}_1$.

Мы предполагали, что коэффициенты φ_{k_1,k_2,k_3} являются малыми величинами по сравнению с основной частью характеристической функции. Тогда уравнение (21) можно записать в виде

$$\overline{\Gamma}_1^2 = \sigma \Sigma \varphi'_{0.0.k_3} (\overline{L}, \overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_1) \cos (k_3 \overline{g}_1) + C'_3, \tag{21'}$$

где σ — малый параметр,

$$2A \varphi_{0.0.k_3} = \sigma \varphi'_{0.0.k_3}, \quad C'_3 = -2AC_3 + \frac{A \mu^2 m^3}{\overline{L}^2}.$$

Решение уравнения (21′) можно строить в виде ряда

$$\overline{\Gamma}_1 = \overline{\Gamma}_1^0 + \sum_{s=1}^{\infty} \sigma^s \overline{\Gamma}_1^{(s)}, \tag{22}$$

при этом имеем

$$\overline{\Gamma}_1^0 = \sqrt{C'_3},$$

$$\overline{\Gamma}_1^{(1)} = \frac{\Sigma \varphi'_{0.0.k_3} (C_1, C_2, \sqrt{C'_3}) \cos (k_3 \overline{g}_1)}{2 \sqrt{C'_3}}, \tag{23}$$

. . . .

Этот метод позволяет построить решение уравнения (21′) в виде тригонометрического ряда

$$\overline{\Gamma}_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_1^s \cos (s \overline{g}_1), \tag{24}$$

где γ_1^s — постоянные коэффициенты, зависящие от C_1, C_2, C'_3.

Теперь можно построить тригонометрические ряды, расположенные по кратным $\overline{g}_1$ для переменных $\overline{l}$, $\overline{g}$. Для этого в квадратурах

$$\overline{l} - l_0 = - \int \frac{-\dfrac{\mu^2 m^3}{\overline{L}^3} + \sum \dfrac{\partial \varphi_{0.0.k_3}}{\partial \overline{L}} \cos (k_3 \overline{g}_1)}{-\dfrac{\overline{\Gamma}_1}{A} + \sum \dfrac{\partial \varphi_{0.0.k_3}}{\partial \overline{\Gamma}_1} \cos (k_3 \overline{g}_1)} d\overline{g}_1,$$

$$\overline{g} - g_0 = - \int \frac{\sum \dfrac{\partial \varphi_{0.0.k_3}}{\partial \overline{\Gamma}} \cos (k_3 \overline{g}_1)}{-\dfrac{\overline{\Gamma}_1}{A} + \sum \dfrac{\partial \varphi_{0.0.k_3}}{\partial \overline{\Gamma}_1} \cos (k_3 \overline{g}_1)} d\overline{g}_1, \tag{25}$$

которые получаются из (20) заменой переменной интегрирования, нужно представить подинтегральные выражения явными функциями переменной $\overline{g}_1$. После этого квадратуры вычисляются и переменные $\{\overline{l}, \overline{g}\} = \ni$ представляются рядами вида

$$\overline{\ni} - \ni_0 = \ni_0^0 \overline{g}_1 + \sum_{s=1}^{\infty} \ni_s \sin (s \overline{g}_1). \tag{26}$$

Зависимость переменных промежуточной задачи от времени находится с помощью обращения квадратуры

$$t - t_0 = - \int \frac{d\overline{g}_1}{-\dfrac{\overline{\Gamma}_1}{A} + \sum \dfrac{\partial \varphi_{0.0.k_3}}{\partial \overline{\Gamma}_1} \cos (k_3 \overline{g}_1)}.$$

§ 4. Схема усреднения Фату

Для этой схемы производится однократное усреднение по формуле

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi d\bar{g}_1 = \frac{\mu^2 m^3}{2\bar{L}^2} - \frac{\bar{\Gamma}_1^2}{2A} + \Sigma\varphi_{k_1,k_2,0}(\bar{L}, \bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}_1)\cos(k_1\bar{l} + k_2\bar{g}).$$

Соответствующая упрощенная система уравнений

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{l}}, \quad \frac{d\bar{\Gamma}}{dt} = \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{g}}, \quad \frac{d\bar{\Gamma}_1}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\bar{l}}{dt} = -\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{L}}, \quad \frac{d\bar{g}}{dt} = -\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{\Gamma}}, \quad \frac{d\bar{g}_1}{dt} = -\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{\Gamma}_1}. \tag{27}$$

допускает два первых интеграла:

$$\bar{\Phi} = C_1, \ \bar{\Gamma}_1 = C_2. \tag{28}$$

В общем случае уравнения (27) не удается проинтегрировать до конца.

Уравнения (1) опишут плоское поступательно-вращательное движение тела в поле притяжения шара, если в последних положить $H = G$, $H_1 = G_1$, $L = 0$. При этом точные уравнения задачи запишутся в более коротком виде:

$$\frac{d(L, G, G_1)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial(l, g, g_1)}, \quad \frac{d(l, g, g_1)}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial(L, G, G_1)}, \tag{29}$$

где

$$F = \frac{\mu^2 m^3}{2L^2} - \frac{G_1^2}{2A} + \Sigma\psi_{k_1,k_2}(L, G, G_1)\cos[k_1 l + k_2(g - g_1)]. \tag{30}$$

В результате усреднения (29) по схеме Фату мы приходим к интегрируемой системе уравнений, общий интеграл которой имеет вид:

$$\bar{\Phi} = C_1, \ \bar{G} = C_2, \ \bar{G}_1 = C_3, \ \bar{l} - l_0 = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{L}}dt,$$
$$\bar{g} - g_0 = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{G}}dt, \ \bar{g}_1 - g_1^0 = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{G}_1}dt, \tag{31}$$

где

$$\bar{\Phi} = \frac{\mu^2 m^3}{2\bar{L}^2} - \frac{G_1^2}{2A} + \Sigma\psi_{k_1,0}(\bar{L}, \bar{G}, \bar{G}_1)\cos(k_1\bar{l}).$$

Обращение интегралов (31) производится аналогично § 3. Окончательное решение представляется в виде:

$$\bar{L} = \sum_{s=0}^{\infty} L_s\cos(s\bar{l}), \ t - t_0 = t_0^0\bar{l} + \sum_{s=1}^{\infty} t_s\sin(s\bar{l}),$$
$$\bar{G} = C_2, \ \bar{g} - g_0 = g_0^0\bar{l} + \sum_{s=1}^{\infty} g_s\sin(s\bar{l}), \tag{32}$$

$$\overline{G}_1 = C_3,\ \overline{g}_1 - g_1^0 = g_{10}^0\overline{l} + \sum_{s=1}^{\infty} g_1^s \sin(s\overline{l}),$$

где L_s, t_s, g_s, g_1^s, t_0^0, g_0^0, g_{10}^0 — постоянные величины.

§ 5. Схема усреднения Делоне — Хилла

Произведем усреднение уравнений движения по схеме Делоне — Хилла. Для этого введем в рассмотрение аномалию Делоне

$$D = \overline{k}_1 l - \overline{k}_3 g_1, \tag{33}$$

где $\overline{k}_1$, $\overline{k}_3$ — целые числа, такие, что выражение $\overline{k}_1 \frac{\mu^2 m^3}{\overline{L}^3} - \overline{k}_3 \frac{\overline{\Gamma}_1}{A}$ есть малая величина порядка σ.

Произведем усреднение характеристической функции задачи по Делоне — Хиллу [9]. В результате будем иметь

$$\overline{\Phi} = \frac{\mu^2 m^3}{2\overline{L}^2} - \frac{\overline{\Gamma}_1^2}{2A} + \Sigma\varphi_{s\overline{k}_1, k_2, s\overline{k}_3} \cos(s\overline{D} + k_2\overline{g}). \tag{34}$$

Соответствующие усредненные уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{k}_1 \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{D}},\quad \frac{d\overline{\Gamma}}{dt} = \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{g}},\quad \frac{d\overline{\Gamma}_1}{dt} = -\overline{k}_3 \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{D}},$$
$$\frac{d\overline{l}}{dt} = -\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{L}},\quad \frac{d\overline{g}}{dt} = -\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\Gamma}},\quad \frac{d\overline{g}_1}{dt} = -\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\Gamma}_1}. \tag{35}$$

Уравнения (35) допускают два первых интеграла:

$$\overline{\Phi} = C_1,\ \overline{k}_1\overline{\Gamma}_1 + \overline{k}_3\overline{L} = C_2, \tag{36}$$

поэтому в общем случае проинтегрировать уравнения (35) не удается.

Рассмотрим теперь плоское поступательно-вращательное движение тел. И введем в уравнения (29) аномалию Делоне по формуле

$$D = \overline{k}_1 l - \overline{k}_2 (g_1 - g). \tag{37}$$

Производя усреднение уравнений (29) по Делоне — Хиллу и интегрируя последние, получим полную систему первых интегралов:

$$\overline{\Phi} = C_1,\quad \overline{k}_1\overline{\Gamma}_1 + \overline{k}_3\overline{L} = C_2,\ \overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}_1 = C_3, \tag{38}$$
$$\overline{l} - l_0 = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{L}} dt,\ \ \overline{g} - g_0 = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{G}} dt,\ \ \overline{g}_1 - g_1^0 = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{G}_1} dt,$$

где C_1, C_2, C_3, l_0, g_0, g_1^0 — произвольные постоянные интегрирования.

Операция обращения интегралов (38) подробно рассмотрена в работе [11], и здесь мы не будем на ней останавливаться.

Таким образом, усреднение по Делоне — Хиллу порождает интегрируемую систему уравнений в случае плоского поступательно-вращательного движения.

В работе показано, что схемы усреднения Гаусса и Моисеева для задачи о поступательно-вращательном движении осесимметричного твердого тела в поле притяжения шара являются интегрируемыми в общем случае пространственного движения. Схемы усреднения Фату и Делоне — Хилла строго интегрируются лишь в случае плоского поступательно-вращательного движения тел. Для каждой интегрируемой схемы усреднения в работе намечены пути обращения первых интегралов.

Следует отметить, что для успешного проведения операции обращения является важным создание полуаналитических методов программирования на ЭВМ, аналогичных по своей сути, например, методу [12].

Промежуточные движения, построенные в работе, имеют очевидные преимущества по сравнению с невозмущенным кеплерово-эйлеровским движением, так как в этом движении уже учтены основные эффекты ньютоновского взаимодействия тел для тех или иных типов движения.

Результаты работы открывают возможности практического применения промежуточных теорий при изучении поступательно-вращательного движения тел солнечной системы и при изучении движения двойных звезд.

Автор выражает благодарность Е. А. Гребеникову за полезные замечания. Результаты работы докладывались на семинаре Г. Н. Дубошина в январе 1975 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондурарь В. Т. «Астрономический журнал», 1961, 5, 232.
2. Кондурарь В. Т. «Астрономический журнал», 1962, 6, 405.
3. Lanzano P. «Astrophys. Space Sci.», 1969, 5, 300.
4. Lanzano P. «Astrophys. Space Sci.», 1970, 11, 191.
5. Дубошин Г. Н. Небесная механика, Основные задачи и методы. М., 1968.
6. Баркин Ю. В. «Астрономический журнал», 1977, 54, 711.
7. Kinoshyta H. «Publ. Astron. Soc. Japan.», 1972, 24, 423.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Астрономические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1958.
9. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. М., 1971.
10. Баркин Ю. В. «Астрономический журнал», 1977, 54, 413.
11. Баркин Ю. В. «Астрономический журнал», 1975, 52, 1076.
12. Гребеников Е. А., Миронов С. В., Приходько В. А. «Астрономический журнал», 1973, 50, 1309.

Поступила в редакцию
16.11 1976 г.
Кафедра небесной механики
и гравиметрии