

УДК 532.517.2

В. М. Белокопытов

Ю. Г. Пыркин

ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЯЗКОСТИ
НА ПАРАМЕТРЫ ПРИДОННОГО
ПЛОТНОСТНОГО ПОТОКА

Приведено решение задачи о нахождении вертикального распределения средней скорости течения придонного потока, распространяющегося вдоль наклонного дна в неподвижной более легкой жидкости, для случая, когда коэффициент вязкости является функцией вертикальной координаты, и для случая, когда коэффициент вязкости постоянен по всей глубине жидкости. Показано, что при исследовании придонных потоков, плотность которых превышает плотность вышележащей жидкости более чем на $5 \cdot 10^{-3}$ г/см³, нужно учитывать изменение коэффициента вязкости с глубиной, так как это изменение оказывает сильное влияние на вид профиля скорости. Если же разность плотностей меньше этой величины, то при расчете параметров потока можно считать коэффициент вязкости постоянным.

В придонных плотностных потоках, представляющих собой потоки более холодной или более соленой жидкости, суспензионные потоки малой плотности и т. п., коэффициент вязкости оказывает существенное влияние на механизм движения. А поскольку вязкость зависит от плотности, в случае, когда в поле течения имеются заметные разности плотностей, нужно рассматривать μ как функцию координат. Однако в исследованных до настоящего времени потоках величина разности плотностей изменялась в широких пределах — от $1 \cdot 10^{-4}$ до $1 \cdot 10^{-2}$ г/см³ [1—3], поэтому возникает вопрос, в каких случаях μ можно считать постоянным по всей глубине жидкости. Знание данного вопроса позволит уточнить некоторые математические модели, используемые при расчете параметров придонных потоков.

Рассмотрим двумерное ламинарное установившееся течение придонного плотностного потока, распространяющегося в неподвижной жидкости вдоль наклонного дна за счет составляющей силы тяжести. Положим, что плотность придонного потока непрерывно возрастает с увеличением глубины. Потоки с подобным распределением плотности часто наблюдаются в океанах, морях и водохранилищах.

Считаем, что для придонных плотностных потоков справедливы допущения теории пограничного слоя [4]. Тогда для плотности потока и для слоя увлечения вышележащей более легкой жидкости можно записать следующие уравнения движения:

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + W_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{g \Delta \rho(z)}{\rho(z)} + \frac{1}{\rho(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \mu(z) \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad (1)$$

$$U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + W_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} = \frac{\mu_2}{\rho_2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}, \quad (2)$$

к которым добавляются уравнения неразрывности

$$\frac{\partial (\rho U_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho W_1)}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где x — координата, направленная вдоль уклона, z — координата, перпендикулярная дну; U_1 и W_1 — продольная и поперечная составляющие скорости течения придонного плотностного потока; U_2 и W_2 — то же для слоя увлечения; $\rho(z)$, $\mu(z)$ — плотность и вязкость плотностного потока; ρ_2 и μ_2 — плотность и вязкость вышележащих слоев более легкой жидкости; g — ускорение силы тяжести; $i = \sin \alpha$ (α — угол наклона дна), $\Delta\rho(z) = \rho(z) - \rho_2$.

Зависимость вязкости от плотности и изменение плотности с глубиной обуславливают зависимость μ от z . Если плотность линейно увеличивается с увеличением глубины, то можно записать

$$\rho(z) = \rho_1 - k_\rho z, \quad (5)$$

$$\mu(z) = \mu_1 - k_\mu z, \quad (6)$$

где

$$k_\rho = \frac{\rho_1 - \rho_2}{h}, \quad k_\mu = \frac{\mu_1 - \mu_2}{h}, \quad (7)$$

ρ_1 и μ_1 — плотность и вязкость придонного потока у дна, h — толщина потока.

Граничные условия для системы (1)–(4) имеют вид

$$\begin{aligned} U_1|_{z=0} &= 0 & U_2|_{z=l} &= 0 \\ W_1|_{z=0} &= 0 & W_2|_{z=l} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где l — толщина слоя увлечения более легкой жидкости. Экспериментальные данные показывают, что она находится в пределах от 1,5 до $2h$ [5–7].

При $z=h$ для горизонтальных компонентов скорости справедливы условия сопряжения

$$U_1|_{z=h} = U_2|_{z=h}, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial z} \right|_{z=h} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial z} \right|_{z=h},$$

а для вертикальных компонентов справедливо выражение

$$W_1|_{z=h} = W_2|_{z=h}. \quad (10)$$

Так как в натуральных условиях придонные плотностные потоки распространяются на большие расстояния, мало изменяясь по толщине (по данным работ [1, 8] $\frac{dh(x)}{dx} \sim 10^{-5} - 10^{-4}$), то в первом приближении мы можем считать, что $h(x) = \text{const}$. Это означает, что движение плотностного потока может быть аппроксимировано плоскопараллельным течением.

Таким образом,

$$W_1 = W_2 = 0, \quad (11)$$

и из уравнений неразрывности следует, что

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0,$$

т. е.

$$U_1 = U_1(z), \quad U_2 = U_2(z). \quad (12)$$

Тогда система (1) — (4) вырождается в систему

$$gi \Delta \rho(z) + \frac{d}{dz} \mu(z) \frac{dU_1}{dz} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 U_2}{dz^2} = 0, \quad (14)$$

граничные условия и условия сопряжения для которой имеют вид

$$\begin{aligned} U_1|_{z=0} &= 0, \\ U_1|_{z=h} &= U_2|_{z=h}, \\ \left. \frac{dU_1}{dz} \right|_{z=h} &= \left. \frac{dU_2}{dz} \right|_{z=h}, \\ U_2|_{z=l} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Интегрируя систему (13) — (14) с учетом (15), получаем следующие выражения для скорости течения придонного плотностного потока и слоя увлечения вышележащей жидкости.

$$\begin{aligned} U_1 = \frac{gi(\rho_1 - \rho_2)}{k_\mu} \left[z - \frac{\mu_1}{k_\mu} \ln \frac{\mu_1}{\mu_1 - k_\mu z} \right] + \frac{gik_\rho}{2k_\mu^3} \left\{ \frac{1}{2} [\mu_1^2 - (\mu_1 + k_\mu z)^2] + \right. \\ \left. + \mu_1^2 \ln \frac{\mu_1}{\mu_1 - k_\mu z} \right\} + \frac{C}{k_\mu} \ln \frac{\mu_1}{\mu_1 - k_\mu z}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$U_2 = (l - z) \left[\frac{gi(\rho_1 - \rho_2)h}{2\mu_2} - \frac{C}{\mu_2} \right], \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{\mu_2 h \ln \frac{\mu_1}{\mu_2} + (l - h)(\mu_1 - \mu_2)} \cdot \frac{gi(\rho_1 - \rho_2)h}{2(\mu_1 - \mu_2)^2} \left[(\mu_1 - \mu_2)^3(l - h) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \mu_2 h (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - 3\mu_2) + \mu_1 \mu_2 h (\mu_1 - 2\mu_2) \ln \frac{\mu_1}{\mu_2} \right]; \end{aligned} \quad (18)$$

а параметры k_ρ и k_μ находятся из выражений (7).

Вертикальное распределение средней скорости течения придонного потока и слоя увлечения, рассчитанное по формулам (16) — (18), изображено на рис. 1. На этом же рисунке нанесены данные натурных измерений [1]. Как видно из рисунка, наблюдается хорошее совпадение расчетной кривой с экспериментом.

Выражения (16) — (18) получены для случая, когда коэффициент вязкости μ , зависящий от плотности жидкости, является функцией координат — $\mu(z)$. Однако если разность плотностей потока и вышележащей жидкости мала, то коэффициент вязкости можно считать постоянным по всей глубине жидкости $\mu(z) = \mu = \text{const}$.

В этом случае уравнения движения (1) — (2) принимают вид

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + W_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{gi \Delta \rho(z)}{[\rho(z)]} + \frac{\mu}{[\rho(z)]} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}, \quad (19)$$

$$U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + W_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho_2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}, \quad (20)$$

а уравнения неразрывности, граничные условия и условия сопряжения имеют вид (3)—(4) и (8)—(10). Тогда учет выражений (11), (12) приводит к тому, что система (19)—(20) вырождается в систему

$$gi \Delta \rho(z) + \mu \frac{d^2 U_1}{dz^2} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{d^2 U_2}{dz^2} = 0 \quad (22)$$

с граничными условиями (15).

Решение этой системы дает следующие выражения для скоростей течения придонного потока и слоя увлечения:

$$U_1 = \frac{gi(\rho_1 - \rho_2)}{2\mu} z^2 \left(\frac{1}{3} \frac{z}{h} - 1 \right) + Cz, \quad (23)$$

$$U_2 = (l - z) \left[\frac{gi(\rho_1 - \rho_2)}{2\mu} h - C \right], \quad (24)$$

где

$$C = \frac{gi(\rho_1 - \rho_2)h}{2\mu} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{l} \right). \quad (25)$$

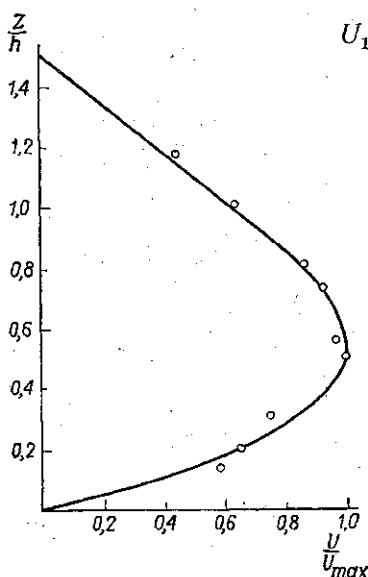


Рис. 1

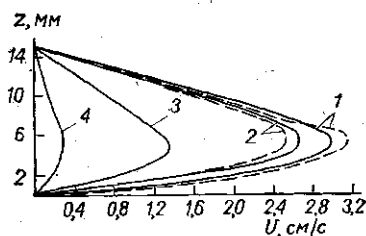


Рис. 2

Или, после приведения к безразмерному виду,

$$V = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{Re Ri} \left[\frac{\eta}{k} \left(k - \frac{1}{3} \right) - \eta^2 \left(1 - \frac{1}{3} \eta \right) \right], & 0 \leq \eta \leq 1, \\ \frac{1}{6} \text{Re Ri} \frac{1}{k} (k - \eta), & 1 \leq \eta \leq k, \end{cases}$$

где

$$\text{Re} = \frac{U_* h}{\nu}, \quad \text{Ri} = \frac{gi(\rho_1 - \rho_2)h}{\rho_1 U_*^2}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_1},$$

$$\eta = \frac{z}{h}, \quad k = \frac{l}{h}, \quad V = \frac{U}{U_*}, \quad U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_1}},$$

τ_0 — касательное напряжение на дне.

На рис. 2 показаны вертикальные распределения средней скорости придонного плотностного потока и слоя увлечения более легкой жидкости, вычисленные по формулам (16)—(18) для $\mu = \mu(z)$ (пунктирные

линии) и по формулам (23)—(25) для $\mu = \text{const}$ (сплошные линии) при разных значениях $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$. Кривая 1 соответствует значению $\Delta\rho = 1,7 \cdot 10^{-2}$ г/см³, кривая 2 — $\Delta\rho = 1 \cdot 10^{-2}$ г/см³, кривая 3 — $\Delta\rho = 5 \cdot 10^{-3}$ г/см³, кривая 4 — $\Delta\rho = 1 \cdot 10^{-3}$ г/см³. Как видно из рисунка, при значениях $\Delta\rho > 5 \cdot 10^{-3}$ г/см³ необходимо учитывать изменение коэффициента вязкости с глубиной, так как это изменение оказывает сильное влияние на вид профиля скорости придонного потока.

Таким образом, при исследовании придонных плотностных потоков, плотность которых превышает плотность воды более чем на $5 \cdot 10^{-3}$ г/см³, нужно учитывать изменение коэффициента вязкости μ , вызванное стратификацией. Если же разность плотностей потока и вышележащих слоев воды меньше или равна $5 \cdot 10^{-3}$ г/см³, то при расчете параметров потока можно считать μ постоянным по всей глубине жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поборчая Л. В., Чижов В. П. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астроном.», 1972, 13, № 4, 395—399.
2. Stetson H. C., Smith J. E. «Amer. J. Sci.», 1938, 35.
3. Анучин В. Н. Канд. дис. МГУ, 1974.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1973.
5. Анучин В. Н., Гусев А. М., Михайлова Н. А., Петров В. П., Пыркин Ю. Г. Материалы Международного симпозиума по стратифицированным течениям. Новосибирск, 1972.
6. Georgiev B. V. Int. Symp. of Stratified flow. Novosibirsk, 1972.
7. Johnson M. A. «Sci Progr.», 1962, 50, N 198.
8. Пыркин Ю. Г., Пивоваров А. А., Хунджа Г. Г. ДАН, 1968, № 3.

Поступила в редакцию
20.1 1977 г.
Кафедра физики
моря и вод суши