

УДК 535.343

А. Н. Дубовик

ЭФФЕКТЫ ФОКУСИРОВКИ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ НА НЕЛИНЕЙНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ПЯТОГО ПОРЯДКА В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Теоретически рассмотрено смещение частот в сфокусированных пучках на нелинейной восприимчивости пятого порядка в изотропных средах. Подробно исследовано поведение функций фокусировки, найдены аналитические решения, определены условия применимости этих решений. Для всех процессов обсуждены вопросы оптимизации мощности при фокусировке. Кратко рассмотрены каскадные процессы в сфокусированных пучках.

Фокусировка лазерных пучков является эффективным средством увеличения к. п. д. преобразования в нелинейных взаимодействиях, что особенно существенно для процессов с фазовой расстройкой, когда условие фазового синхронизма выполнить невозможно или это связано с экспериментальными трудностями. Следует отметить, что при исследовании газовых сред фокусировка пучка в центр нелинейной среды представляет единственный способ избежать пробоя окон кюветы и в то же время получить в ней необходимую плотность мощности.

Увеличение к. п. д. преобразования при фокусировке происходит вследствие увеличения плотности мощности накачки при одновременной частичной или полной (векторный синхронизм) компенсации фазовой расстройкой за счет неколлинеарности взаимодействия в сфокусированном пучке. Влияние фокусировки в первую очередь определяется степенью фокусировки, т. е. отношением длины нелинейной среды к конфокальному параметру. В предельных случаях слабой и жесткой фокусировки, когда это отношение соответственно много меньше или больше единицы, влияние фокусировки существенно различно. В общем случае функция, учитывающая влияние фокусировки на эффективность того или иного процесса, зависит от целого ряда параметров. В связи с этим в каждом конкретном случае важно знать условия оптимальной фокусировки для получения максимального к. п. д. преобразования. Однако анализ поведения функции для нахождения этих условий возможен лишь для указанных выше предельных случаев, где для нее могут быть найдены аналитические решения, во всех остальных случаях требуется численный расчет на ЭВМ.

Подавляющее число исследований в нелинейной оптике связано в настоящее время с процессами на нелинейных восприимчивостях второго и третьего порядков, однако в последние годы по ряду причин значительно возрос интерес к исследованию многоквантовых взаимодействий на высших (выше третьего порядка) нелинейных восприимчивостях. Эффекты фокусировки для процессов на низших нелинейностях подробно изучены в [1—6]. Генерация высших гармоник в сфокусированных пучках рассмотрена в работах [6, 7]. В частности, в [7] большое внимание уделено учету каскадных процессов (см. также [8]) при

генерации пятой гармоники и численно решена задача для трех связанных волн в изотропной среде; полученные результаты указывают на возможность эффективного преобразования в пятую гармонику. Оценки эффективности преобразования для ряда многоквантовых процессов приведены также в [9]. Отметим, наконец, первые экспериментальные исследования [10, 11] процессов на высших нелинейностях.

В данной работе представлены результаты теоретического исследования процессов смещения частот в сфокусированных пучках на нелинейной восприимчивости пятого порядка. Рассмотрены нерезонансные, стационарные (квазистационарные) процессы смещения в изотропной среде. В приближении заданного поля получены выражения для мощности генерируемого излучения. Подробно проанализировано поведение функций фокусировки, в предельных случаях слабой и жесткой фокусировки найдены аналитические решения, обсуждаются пределы их применимости. В ряде случаев в виде графиков представлены результаты численного интегрирования функций фокусировки на ЭВМ. Для всех типов процессов обсуждаются вопросы по оптимизации мощности. Кратко рассмотрена теория каскадных процессов в сфокусированных пучках.

Теория

Смещение частот на нелинейной восприимчивости пятого порядка является шестифотонным процессом и в общем случае характеризуется взаимодействием пяти различных полей накачки с частотами ω_n ($n=1, \dots, 5$), которые возбуждают в среде волны нелинейной поляризации с частотами $\omega_6 = \omega_i \pm \omega_k \pm \omega_l \pm \omega_m \pm \omega_p$ ($i, k, l, m, p=1, \dots, 5$). Не ограничивая общности, в дальнейшем будем рассматривать следующие невырожденные по частоте взаимодействия:

$$\omega_6 = \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 & (1.1) \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 & (1.2) \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 & (1.3) \\ \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 & (1.4) \\ \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 & (1.5) \end{cases}$$

которыми представлены все типы взаимодействий при смещении частот на восприимчивости пятого порядка. (Здесь и далее на тип процесса указывает вторая цифра в нумерации выражений.) Все остальные частично или полностью вырожденные по частоте взаимодействия представляют частные случаи взаимодействий (1).

В дальнейшем также предполагается, что процесс преобразования является стационарным и нерезонансным, а поля накачки считаются заданными функциями координат (приближение заданного поля).

Будем полагать, что накачка представляет собой гауссовские пучки низшей моды, распространяющиеся вдоль оси z , с амплитудами полей E_{n0} и волновыми векторами k_n ; все пучки сфокусированы с одинаковым конфокальным параметром и с одинаковым положением центров перетяжек (фокусов пучков) вдоль оси z . Суммарное поле накачки в среде в этом случае можно представить в виде

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 \{E_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} + E_n^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_n t}\}, \quad (2)$$

$$E_n(\mathbf{r}) = E_{n0} (1 + i\xi)^{-1} e^{ik_n z} \exp \left[-\frac{k_n (x^2 + y^2)}{b(1 + i\xi)} \right], \quad (3)$$

где $b = k_n \omega_{0n}^2$ — конфокальный параметр фокусировки (ω_{0n} — радиусы пучков в фокальной плоскости), f — положение фокальной плоскости вдоль оси z и $\xi = 2(z-f)/b$ — безразмерная нормированная координата.

В общем случае эллиптической поляризации векторов E_{n0} связь нелинейной поляризации среды на частоте ω_6 с полями накачки выражается через все компоненты тензора нелинейной восприимчивости и весьма громоздка. Мы будем полагать, что все поля накачки линейно поляризованы в одном направлении (например вдоль оси x). В этом случае векторным характером полей можно пренебречь и записать нелинейную поляризацию среды в скалярном виде

$$\mathcal{P}_6(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{P}_6(\mathbf{r}) e^{-i\omega_6 t} + \mathcal{P}_6^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_6 t} \}, \quad (4)$$

где $\mathcal{P}_6(\mathbf{r})$ для взаимодействия первого типа (сложение частот) равно

$$\mathcal{P}_6(\mathbf{r}) = \frac{15}{2} N \chi^{(5)}(\omega_6) \prod_{n=1}^5 E_n(\mathbf{r}). \quad (5.1)$$

Здесь N — плотность нелинейной среды, $\chi^{(5)}(\omega_6) \equiv \chi_{xxxxxx}(\omega_6)$ — восприимчивость пятого порядка в расчете на атом. Для остальных типов взаимодействий выражения аналогичны с заменой $E_n(\mathbf{r})$ на $E_n^*(\mathbf{r})$ для каждой отрицательной частоты ω_n .

Будем считать для определенности, что нелинейная среда занимает полупространство $z > 0$, а полупространство $z < 0$ является вакуумом.

С учетом этого из (3) и (5) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_6(\mathbf{r}) = & \frac{15}{2} N \chi^{(5)}(\omega_6) \prod_{n=1}^5 E_{n0} W(\xi) (1 + \xi^2)^{-1} \times \\ & \times \exp(ik' z) \exp \left[-\frac{(k'' - ik' \xi)(x^2 + y^2)}{b(1 + \xi^2)} \right] B(z), \end{aligned} \quad (6)$$

где $k'' = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5$, $B(z) = \{1 \text{ при } z > 0 \text{ и } 0 \text{ при } z < 0\}$, а волновой вектор нелинейной поляризации k' и выражение $W(\xi)$ для рассматриваемых взаимодействий имеют вид

$$k' = \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 \equiv k'' & (7.1) \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - k_5 & (7.2) \\ k_1 + k_2 + k_3 - k_4 - k_5 & (7.3) \\ k_1 + k_2 - k_3 - k_4 - k_5 & (7.4) \\ k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5 & (7.5) \end{cases} \quad W(\xi) = \begin{cases} (1 + i\xi)^{-4} (1 - i\xi) & (7.1) \\ (1 + i\xi)^{-3} & (7.2) \\ (1 + i\xi)^{-2} (1 - i\xi)^{-1} & (7.3) \\ (1 + i\xi)^{-1} (1 - i\xi)^{-2} & (7.4) \\ (1 - i\xi)^{-3} & (7.5) \end{cases}$$

Укороченное волновое уравнение для медленной амплитуды поля генерируемой волны $A_6(\mathbf{r})$ имеет вид [12]

$$2ik_6 \frac{\partial A_6(\mathbf{r})}{\partial z} + \Delta_{\perp} A_6(\mathbf{r}) = -4\pi k_{60}^2 \mathcal{P}_6(\mathbf{r}) e^{-ik_6 z}, \quad (8)$$

где k_{60} и k_6 — волновой вектор генерируемой волны в вакууме и в среде, Δ_{\perp} — поперечный лапласиан. Решение уравнения (8) может быть

найдено либо с помощью функции Грина [1, 3], либо спектральным методом [2, 5, 6]. При $|\Delta k| \ll k_0, k'$ для $E_0(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}) e^{ik_0 z}$ получаем

$$E_6(\mathbf{r}) = i \frac{15}{2} \pi \frac{k_{60}^2 b}{k_0} N \chi^{(5)}(\omega_0) \prod_{n=1}^5 E_{n0} e^{ik_n z} \times \int_{-\xi}^{\xi} d\xi' e^{-i \frac{b\Delta k}{2} (\xi' - \xi)} \frac{W(\xi')}{(k'' - ik' \xi') H(\xi, \xi')} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{bH(\xi, \xi')}} \quad (9)$$

где $\xi = \frac{2f}{b}$ — безразмерная нормированная координата фокуса пучков (центров перетяжек), $\Delta k = k_0 - k'$ — расстройка волновых векторов генерируемой волны и нелинейной поляризации среды;

$$H(\xi, \xi') = \frac{1 + \xi'^2}{k'' - ik' \xi'} - i \frac{\xi' - \xi}{k'}. \quad (10)$$

Если положить $\xi = 2(L - f)/b$, где L — длина нелинейной среды, то выражение (9) полностью определяет поле генерируемой волны в плоскости $z=L$ на выходе из нелинейной среды. В этом случае мощность генерируемого излучения P_6 определяется выражением

$$P_6 = (4,504 \cdot 10^{-7}) \frac{k_{60}^4 k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{b^2 k_0^2 k'} N^2 [\chi^{(5)}(\omega_0)]^2 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 \times \frac{n_6}{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} F_j \left(b\Delta k, \frac{b}{L}, \frac{f}{L}, \frac{k''}{k'} \right). \quad (11)$$

Здесь n_i — показатели преломления волн в среде и мощности всех волн выражены в ваттах, а остальные величины — в единицах СГСЭ. Безразмерные функции $F_j \left(b\Delta k, \frac{b}{L}, \frac{f}{L}, \frac{k''}{k'} \right)$ учитывают эффекты фокусировки и имеют вид (индекс j указывает тип процесса)

$$F_j \left(b\Delta k, \frac{b}{L}, \frac{f}{L}, \frac{k''}{k'} \right) = \frac{2k'}{\pi b} \int_0^\infty 2\pi R dR \times \left| \int_{-\xi}^{\xi} d\xi' e^{-i \frac{b\Delta k}{2} (\xi' - \xi)} \frac{W(\xi')}{(k'' - ik' \xi') H(\xi', \xi)} e^{-\frac{R^2}{bH}} \right|^2. \quad (12)$$

Для процессов, частично или полностью вырожденных по частоте, численный коэффициент в (11) будет другим. Его можно представить в виде $(8,007 \cdot 10^{-9}) \alpha^2$, где α — численный коэффициент в выражении типа (5) для соответствующего процесса. В частности, при генерации пятой гармоники $\alpha = 1/16$ и численный коэффициент в (11) равен $3,128 \cdot 10^{-11}$.

Исследование функций $F_j \left(b\Delta k, \frac{b}{L}, \frac{f}{L}, \frac{k''}{k'} \right)$

Наиболее целесообразно рассматривать выражения (12) в зависимости от параметра $b\Delta k$ при фиксированных значениях остальных параметров. Общий характер такой зависимости определяется величиной фиксированного параметра фокусировки L/b и существенно различен в предельных случаях слабой и жесткой фокусировки. В этих случаях выражения (12) можно упростить и найти аналитические решения.

Рассмотрим вначале случай слабой фокусировки ($b \gg L$), который, вообще говоря, всегда имеет место и в нефокусированных пучках вследствие их расходимости. В этом случае F_j можно представить в виде $F_j \left(b \Delta k, \frac{b}{L}, \frac{f}{L}, \frac{k''}{k'} \right)_{b \gg L} = 4 \frac{k''}{k'} \left(\frac{L}{b} \right)^2 \sin^2 \left[\left(\frac{b \Delta k}{2} + m_j \right) \frac{L}{b} \right]$, (13)

где

$$m_j = -\frac{k''}{k'} + \begin{cases} 5 & (14.1) \\ 3 & (14.2) \\ 1 & (14.3) \\ -1 & (14.4) \\ -3 & (14.5) \end{cases}$$

Учитывая, что $\xi' \ll \xi \ll 1$, при выводе (13) всюду были удержаны линейные по ξ и ξ' члены. Как видно из (13), в рассматриваемом приближении положение фокуса пучков не влияет на величину F_j (естественно, в рамках приближения, т. е. $f \ll b$). Оценки показывают, что выражения (13) справедливы при $\frac{L}{b} \frac{k''}{k'} \ll 0,1$.

В случае жесткой фокусировки в центр нелинейной среды ($\frac{f}{L} = 0,5$; $\frac{b}{L} \rightarrow 0$, $\xi = \xi \rightarrow \infty$) можно записать

$$F_j \left(b \Delta k; 0; 0,5; \frac{k''}{k'} \right) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \frac{W(\xi')}{\left(\frac{k''}{k'} - i\xi' \right)} e^{-i \frac{b \Delta k}{2} \xi'} \right|^2, \quad (15)$$

откуда, используя теорию вычетов, получаем

$$F_1 \left(b \Delta k; 0; 0,5; 1 \right) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{9} \left(\frac{b \Delta k}{2} \right)^6 e^{b \Delta k}, & \Delta k < 0, \\ 0, & \Delta k > 0 \end{cases} \quad (16.1)$$

$$F_2 \left(b \Delta k; 0; 0,5; \frac{k''}{k'} \right) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{16 \left(\frac{k''}{k'} + 1 \right)^2} \left\{ \left[b \Delta k \left(\frac{k''}{k'} + 1 \right)^2 - 2 \right]^2 + 4 \right\} e^{b \Delta k}, & \Delta k \leq 0 \\ \frac{4\pi^2}{\left(\frac{k''}{k'} + 1 \right)^6} e^{-b \Delta k} \frac{k''}{k'}, & \Delta k \geq 0 \end{cases} \quad (16.2)$$

$$F_3 \left(b \Delta k; 0; 0,5; \frac{k''}{k'} \right) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{4 \left(\frac{k''}{k'} + 1 \right)^4} \left[(b \Delta k - 1) \left(\frac{k''}{k'} + 1 \right) - 2 \right]^2 e^{b \Delta k}, & \Delta k \leq 0 \\ \frac{\pi^2}{4 \left(\frac{k''}{k'} + 1 \right)^4 \left(\frac{k''}{k'} - 1 \right)^2} \left[\left(\frac{k''}{k'} + 1 \right)^2 - 4e^{-\frac{b \Delta k}{2} \left(\frac{k''}{k'} - 1 \right)} \right]^2 e^{-b \Delta k}, & \Delta k \geq 0 \end{cases} \quad (16.3)$$

$$F_4 \left(b \Delta k; 0; 0,5; \frac{k''}{k'} \right) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{4 \left(\frac{k''}{k'} + 1 \right)^2} e^{b \Delta k}, \Delta k \leq 0 \\ \frac{\pi^2}{4 \left(\frac{k''}{k'} - 1 \right)^4} \left\{ \left[(b \Delta k + 1) \left(\frac{k''}{k'} - 1 \right) - 2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{4}{\left(\frac{k''}{k'} + 1 \right)} e^{-\frac{b \Delta k}{2} \left(\frac{k''}{k'} - 1 \right)} \right\}^2 e^{-b \Delta k}, \Delta k \geq 0, \end{cases} \quad (16.4)$$

$$F_5 \left(b \Delta k; 0; 0,5; \frac{k''}{k'} \right) = \begin{cases} 0, \Delta k \leq 0 \\ \frac{\pi^2}{16 \left(\frac{k''}{k'} - 1 \right)^6} \left\{ \left[b \Delta k \left(\frac{k''}{k'} - 1 \right) - 2 \right]^2 + 4 - 8e^{-\frac{b \Delta k}{2} \left(\frac{k''}{k'} - 1 \right)} \right\}^2 e^{-b \Delta k}, \Delta k > 0. \end{cases} \quad (16.5)$$

При жесткой фокусировке на входную ($f=0$) или выходную ($f=L$) границу среды один из пределов интеграла в (15) обращается в нуль, при этом

$$F_j \left(b \Delta k, 0, 0, \frac{k''}{k'} \right) = F_j \left(b \Delta k, 0, 1, \frac{k''}{k'} \right) = \frac{1}{4} F_j \left(b \Delta k; 0; 0,5; \frac{k''}{k'} \right) + F'_j,$$

где F'_j представляет вклад мнимой части интеграла. В частности, для процесса сложения частот имеем

$$F'_1 = \begin{cases} \frac{1}{36} \left[\left(\frac{b \Delta k}{2} \right)^3 e^{\frac{b \Delta k}{2}} \overline{Ei} \left(-\frac{b \Delta k}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{b \Delta k}{2} \right)^2 - \frac{b \Delta k}{2} + 2 \right]^2, \Delta k \leq 0 \\ \frac{1}{36} \left[\left(\frac{b \Delta k}{2} \right)^3 e^{\frac{b \Delta k}{2}} \overline{Fi} (-b \Delta k) + \right. \\ \left. + \left(\frac{b \Delta k}{2} \right)^2 - \frac{b \Delta k}{2} + 2 \right]^2, \Delta k \geq 0 \end{cases} \quad (17.1)$$

Максимальное значение $F'_j = 0,3153$ при $b \Delta k = -2,44$. Здесь $E_i(x)$, $\overline{Ei}(x)$ — интегральные показательные функции. Выражения для остальных F'_j содержат аналогичные функции, но более громоздки, и мы их не приводим.

При перемещении фокуса пучков с границы среды к ее центру вклад мнимой части интеграла, нечетной по ξ' , быстро спадает до нуля, в то время как вклад реальной части быстро стремится к величине $F_j \left(b \Delta k; 0; 0,5; \frac{k''}{k'} \right)$. Физически это объясняется тем, что основной

вклад в амплитуду генерируемого поля дает область вблизи фокуса пучков с высокой интенсивностью полей накачки, ее размеры относительно невелики, и до тех пор, пока она целиком расположена внутри кюветы, F_j слабо зависят от положения фокуса пучков и практически равны их величине при фокусировке в центр среды. Оценки показывают, что для любого значения $b\Delta k$ отличие от (16) не превышает одного процента,

$$\text{если } \frac{k''}{k'} b \leq f \leq \frac{k''}{k'} (L - b).$$

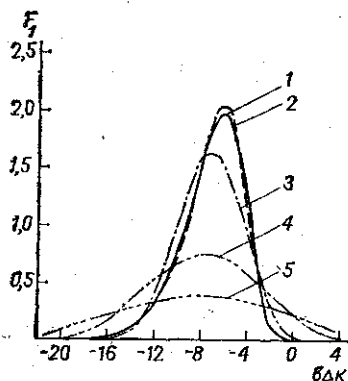


Рис. 1. $F_1(b\Delta k, b/L, 1/2, 1)$ в зависимости от $b\Delta k$ для: 1 — $b/L=3$, 2 — $b/L=2$, 3 — $b/L=1$, 4 — $b/L=0,5$ и 5 — $b/L=1/3$

Условие применимости выражений (16) наиболее просто оценить для функции F_1 (сложение частот). В этом случае $k' \equiv k''$ и переход от точного выражения (12) к приближенному (15) заключается только в замене конечных пределов $\xi = \zeta$ на бесконечные. Ошибка в величине F_1 , совершаемая при такой замене, при любом значении $b\Delta k$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta F_1 < 4 \left[1 + \left(\frac{L}{b} \right)^2 \right]^{-2} \times$$

$$\times \{F_1(b\Delta k; 0; 0,5; 1)\}^{1/2}. \quad (18)$$

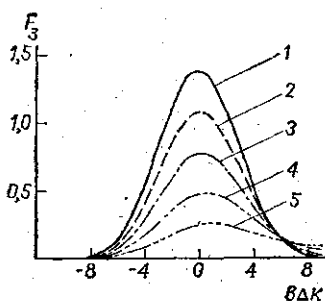


Рис. 2. $F_2(b\Delta k, 1, 1/2, k''/k')$ в зависимости от $b\Delta k$ для: 1 — $k''/k'=1,2$; 2 — $k''/k'=1,5$; 3 — $k''/k'=2$; 4 — $k''/k'=3$ и 5 — $k''/k'=5$

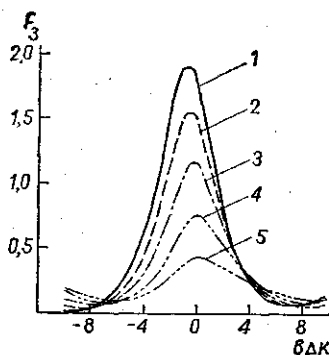


Рис. 3. $F_2(b\Delta k, 1/3, 1/2, k''/k')$ в зависимости от $b\Delta k$ для k''/k' . Обозначения те же, что на рис. 2

Для остальных функций при $k' \neq k''$, кроме замены пределов, переход к (15) связан с предельным переходом под интегралом в (12) при $\xi \rightarrow \infty$, при этом требуется выполнение дополнительного условия на правомерность такого перехода. В этих случаях можно воспользоваться следующей приближенной оценкой: при любом значении $b\Delta k$

$$\Delta F_j \leq 4 \left[1 + \left(\frac{L}{b} \frac{k'}{k''} \right)^2 \right]^{-2} \left\{ F_j \left(b\Delta k; 0; 0,5; \frac{k''}{k'} \right) \right\}^{1/2}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что выражения (16) можно применять вплоть до $\frac{k'}{k''} \frac{L}{b} = 3$, при этом $\Delta F_j \leq 0,06$ для всех значений $b\Delta k$.

При значениях параметра фокусировки $L/b \sim 1$ приближения (13) и (16) неприемлемы и требуется численный расчет (12) на ЭВМ. На рис. 1 представлены графики зависимости функции F_1 от величины параметра $b\Delta k$ при фокусировке в центр среды для значений параметра фокусировки $\frac{L}{b} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$; отметим, что для $\frac{L}{b} = 3$ отличие от значений, вычисленных из (16.1), при любом $b\Delta k$ хорошо со-

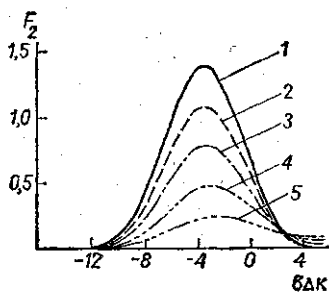


Рис. 4. $F_2(b\Delta k, 1, 1/2, k''/k')$ в зависимости от $b\Delta k$ для k''/k' . Обозначения те же, что на рис. 2

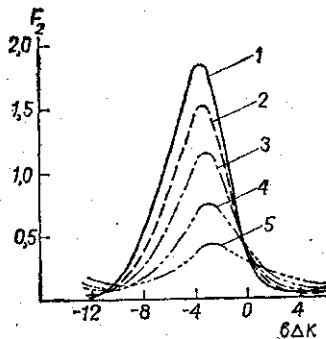


Рис. 5. $F_2(b\Delta k, 1/3, 1/2, k''/k')$ в зависимости от $b\Delta k$ для k''/k' . Обозначения те же, что на рис. 2

гласуется с оценкой (18). На рис. 2, 3 приведены графики F_2 в зависимости от $b\Delta k$ при фокусировке в центр среды для $L/b = 1$ и $L/b = 3$, если $\frac{k''}{k'} = 1, 2; 1, 5; 2, 0; 3, 0; 5, 0$. Аналогичные графики для функции F_3 представлены на рис. 4, 5.

Оптимизация мощности при фокусировке

В условиях, когда влиянием ограничивающих факторов (поглощение, самофокусировка, насыщение, пробой) можно пренебречь, для мощности справедливо выражение (11) и

$$P_0 \sim [\chi^{(5)}(\omega_0)]^2 \left(\prod_{n=1}^5 P_n \right) \frac{N^2}{b^2} F_1 \left(b\Delta k, \frac{b}{L}, \frac{f}{L}, \frac{k''}{k'} \right).$$

Если значения P_n , $\chi^{(5)}$ и $\frac{k''}{k'}$ считать заданными, то оптимизация мощности сводится к оптимизации величины $N^2 b^{-2} F_1$ при изменении параметров N , Δk , b , $\frac{b}{L}$ и $\frac{f}{L}$. Рассмотрим характерные закономерности.

1. Из результатов предыдущего параграфа следует, что в любом случае наиболее рациональна фокусировка, когда

$$\frac{k''}{k'} b/L \ll f/L \ll \frac{k''}{k'} \left(1 - \frac{b}{L} \right).$$

Оптимальной следует считать фокусировку в центр нелинейной среды ($f = \frac{L}{2}$, $\xi = \zeta$).

2. Расстройку волновых векторов Δk в жидких и газовых средах можно изменять независимо от плотности N введением буферных при-

месей, которые изменяют показатели преломления и не меняют нелинейные свойства среды. В этом случае зависимость от N очевидна и при фиксированном b достаточно изменением Δk оптимизировать функцию F_j .

Если специальных мер для изменения Δk не принято, то $\Delta k \sim N$ и при фиксированном b изменением Δk следует оптимизировать величину $(b\Delta k)^2 F_j$, при этом оптимальное значение расстройки волновых векторов $(\Delta k)_{\text{опт}}$ определяет и оптимальное значение плотности среды $N_{\text{опт}}$.

3. При фиксированном значении Δk оптимальную величину конфокального параметра b можно определить из условия максимума величины $(b\Delta k)^{-2} F_j$.

Если $\Delta k \neq 0$, то при $b \rightarrow 0$ оптимизация мощности возможна только для процессов $\omega_6 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5$ и $\omega_6 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 - \omega_5$. Для остальных типов процессов при $\Delta k \neq 0$ (если Δk — независимый от N параметр, то и при $\Delta k = 0$) мощность неограниченно возрастает с уменьшением конфокального параметра. В этих случаях оптимизация мощности сводится к первоначальному выбору минимального значения b , при котором еще можно пренебречь всеми ограничивающими процессами, с дальнейшей оптимизацией путем изменения Δk (п. 2).

Подбор оптимальных условий упрощается в тех случаях, когда для функций F_j справедливы аналитические решения.

При слабой фокусировке $\left(\frac{k''}{k'} \frac{L}{b} \ll 10^{-1}\right)$ из (13) следует, что $P_6 \sim b^{-4} \text{sinc}^2 \left[\left(\frac{b\Delta k}{2} + m_j \right) \frac{L}{b} \right]$. Поскольку для ограниченных пучков даже без фокусировки величина конфокального параметра всегда конечна ($b = k\omega_0^2$), то синхронный режим в таких пучках осуществляется при некоторой малой расстройке волновых векторов $\Delta k_{\text{опт}} = -\frac{2m_j}{b}$, это условие переходит в условие $\Delta k_{\text{опт}} = 0$ для бесконечной плоской волны при $b \rightarrow \infty$.

В случае жесткой фокусировки выражения (16) справедливы с достаточной точностью вплоть до $\frac{k''}{k'} \frac{L}{b} \gg 3$. Рассмотрим условия опти-

мизации для процесса сложения частот. При фиксированном $\Delta k \neq 0$ изменением b (п. 3) мощность оптимизируется при $b\Delta k = -4$. При фиксированном значении b изменением Δk (п. 2) мощность оптимизируется при $b\Delta k = -6$, если Δk — не зависимый от N параметр, и при $b\Delta k = -8$, если $\Delta k \sim N$.

Отметим далее, что все эффекты фокусировки были рассмотрены для случая, когда конфокальные параметры b_n и положения фокусов f_n одинаковы для всех пучков накачки. Этот выбор не случаен. Рассматривая общий случай, когда b_n и f_n для всех пучков различны, можно показать, что при прочих равных условиях функции фокусировки, а значит и мощность, достигают максимальной величины при $b_n \rightarrow b$ и $f_n \rightarrow f$. Мы не приводим общие выражения для функций F_j , которые весьма громоздки. В качестве примера рассмотрим случай слабой фокусировки, когда положения фокусов одинаковы ($f_n = f$), но конфокальные параметры b_n различны; полагая $b_n = b/\beta_n$, где $b = \max\{b_n\}$ и $\beta_n \geq 1$, получаем

$$F_j = 4 \frac{k''}{k'_p} \left(\frac{L}{b} \right)^2 \text{sinc}^2 \left[\left(\frac{b\Delta k}{2} + m_j^{(\beta)} \right) \frac{L}{b} \right], \quad (20)$$

где $k''_{\beta} = \sum_{n=1}^5 k_n \beta_n$ и $m_j^{(\beta)} = -\frac{k''_{\beta}}{k'} + \sum_{n=1}^5 \beta_n \operatorname{sgn} \omega_n$.

Нетрудно видеть, что (20) максимально и совпадает с (13) при $\beta_n = 1$. В случае жесткой фокусировки рассогласование величин b_n и f_n приводит к сдвигу полюсов подынтегральной функции в сторону больших значений на мнимой оси, что также ведет к уменьшению F_j . Вышесказанное предъявляет жесткие требования к подбору величины конфокальных параметров и к совмещению фокусов пучков. Оценки показывают, что при рассогласованиях $\Delta b_n, \Delta f_n \ll 0,05 b$ снижение эффективности преобразования не превышает 20%.

Учет каскадных процессов

Для шестифотонных взаимодействий в изотропной среде весьма характерно, что одновременно с прямым процессом на нелинейной восприимчивости $\chi^{(5)}$ генерация поля с частотой ω_6 осуществляется путем целого ряда каскадных процессов на нелинейной восприимчивости третьего порядка $\chi^{(3)}$ [8]. Например, для взаимодействия $\omega_6 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_5$ возможны каскадные процессы

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &\rightarrow \omega_s, & \omega_s - \omega_4 - \omega_5 &\rightarrow \omega_6, \\ \omega_1 + \omega_2 - \omega_4 &\rightarrow \omega_s'', & \omega_3 + \omega_s'' - \omega_5 &\rightarrow \omega_6, \\ \omega_1 - \omega_4 - \omega_5 &\rightarrow \omega_s''', & \omega_2 + \omega_3 + \omega_s''' &\rightarrow \omega_6 \end{aligned}$$

и т. д. В приближении заданного поля учет каждого каскадного процесса приводит к решению системы двух укороченных уравнений для медленных амплитуд полей $A_s(\mathbf{r})$ и $A_6^{(s)}(\mathbf{r})$ с частотами ω_s и ω_6 соответственно:

$$\begin{aligned} 2ik_s \frac{\partial A_s(\mathbf{r})}{\partial z} + \Delta_{\perp} A_s(\mathbf{r}) &= -4\pi k_{s0}^2 \mathcal{P}_s(\mathbf{r}) e^{-ik_s z}, \\ 2ik_6 \frac{\partial A_6^{(s)}(\mathbf{r})}{\partial z} + \Delta_{\perp} A_6^{(s)}(\mathbf{r}) &= -4\pi k_{60}^2 \mathcal{P}_6^{(s)}(\mathbf{r}) e^{-ik_6 z}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из решения первого уравнения можно в явном виде получить выражение для $\mathcal{P}_6^{(s)}(\mathbf{r})$, что позволяет решить и второе уравнение. Если накачка задана в виде (2), то в случае невырожденных взаимодействий (1) решение для поля $E_6^{(s)}(\mathbf{r}) = A_6^{(s)} e^{ik_6 z}$, возбуждаемого каскадным образом, можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_6^{(s)}(\mathbf{r}) &= -\frac{9}{4} \pi^2 \frac{k_{s0}^2 k_{60}^2}{k_s k_6} b^2 N^3 [\chi^{(3)}(\omega_s) \chi_s^{(3)}(\omega_6)] e^{ik_6 z} \times \\ &\times \prod_{n=1}^5 E_{n0} I \left(b\Delta k, b\Delta k_s, \frac{b}{L}, \frac{f}{L}, \frac{k''}{k'}, \frac{k''_s}{k'_s} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Для каскадных процессов $\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_l \rightarrow \omega_s$, $\omega_s \pm \omega_m \pm \omega_p \rightarrow \omega_6$ $I \left(b\Delta k, b\Delta k_s, \frac{b}{L}, \frac{f}{L}, \frac{k''}{k'}, \frac{k''_s}{k'_s} \right)$ имеет вид

$$I = \int_{-\xi}^{\xi} d\xi' \frac{e^{-i \frac{b\Delta k}{2} (\xi' - \xi)} Q_6^{(s)}(\xi')}{(1 - i\xi')} \times$$

$$\times \int_{-\xi}^{\xi'} d\xi'' \frac{e^{-i \frac{b\Delta k_s}{2} (\xi'' - \xi')} Q_s(\xi'') e^{-\frac{R^2}{b\Phi_s}}}{(k_s'' - ik_s' \xi'') H_s(\xi'', \xi') V_s(\xi'', \xi') \Phi_s(\xi'', \xi', \xi)} \quad (23)$$

где введены обозначения

$$H_s(\xi'', \xi') = \frac{1 + \xi''^2}{k_s'' - ik_s' \xi''} - i \frac{\xi'' - \xi'}{k_s'}$$

$$V_s(\xi'', \xi') = \frac{1}{H_s} + \frac{(k_s'' - k_s') - i(k_s' - k_s') \xi'}{(1 + \xi''^2)}$$

$$\Phi_s(\xi'', \xi', \xi) = \frac{1}{V_s} - i \frac{\xi' - \xi}{k'}, \quad \Delta k_s = k_s - k_s'$$

Здесь k_s, k_s' — волновые векторы поля и нелинейной поляризации среды с частотой ω_s и $k_s'' = k_i + k_j + k_e$. Для $Q_s(\xi'')$ справедливы выражения [5]

$$Q_s(\xi'') = (1 - i\xi'') \begin{cases} (1 + i\xi'')^{-2}, & \omega_s = \omega_i + \omega_j + \omega_e, \\ (1 + \xi''^2)^{-1}, & \omega_s = \omega_i + \omega_j - \omega_e, \\ (1 - i\xi'')^{-2}, & \omega_s = \omega_i - \omega_j - \omega_e. \end{cases}$$

Выражения для $Q_6^{(s)}(\xi')$ аналогичны при выполнении соответствующих условий на частоты для $\omega_6 = \omega_s \pm \omega_m \pm \omega_p$. Для каскадного сложения частот $\omega_i + \omega_j + \omega_l \rightarrow \omega_s, \omega_s + \omega_m + \omega_p \rightarrow \omega_6$ (23) значительно упрощается; в этом случае $k' = k'', k_s = k_s$ и

$$I(b\Delta k; b\Delta k_s; \frac{b}{L}; \frac{f}{L}; 1; 1) = (1 + i\xi)^{-1} \exp\left[\frac{k'' R^2}{b(1 + i\xi)}\right] I_k;$$

$$I_k = \int_{-\xi}^{\xi} d\xi' \frac{e^{-i \frac{b\Delta k}{2} (\xi' - \xi)}}{(1 + i\xi')^2} \int_{-\xi}^{\xi'} d\xi'' \frac{e^{-i \frac{b\Delta k_s}{2} (\xi'' - \xi')}}{(1 + i\xi'')^2}. \quad (24)$$

В случае жесткой фокусировки в центр нелинейной среды ($\xi, \xi \rightarrow \infty$) двойной интеграл $I_k = \text{Re}I_k + i\text{Im}I_k$ равен

$$\text{Re} I_k = \begin{cases} \frac{\pi^2}{2} \cdot b^2 \Delta k_s (\Delta k - \Delta k_s) e^{\frac{b\Delta k}{2}}, & \Delta k < \Delta k_s < 0 \\ 0, & \Delta k_s \leq \Delta k \leq 0; \Delta k \leq 0, \Delta k_s \geq 0; \Delta k \geq 0, \Delta k_s \text{ — любое} \end{cases}$$

$$I_m I_k = \begin{cases} \frac{\pi}{4} b^2 e^{\frac{b\Delta k}{2}} \left[\Delta k^2 - 2\Delta k \Delta k_s + 2\Delta k_s (\Delta k - \Delta k_s) \ln \left| \frac{\Delta k - \Delta k_s}{\Delta k_s} \right| \right], & \Delta k < 0, \Delta k_s \text{ — любое} \\ 0, & \Delta k \geq 0, \Delta k_s \text{ — любое} \end{cases}$$

Как функция двух переменных $b\Delta k$, $b\Delta k_s$, $\text{Re}I_k$ имеет абсолютный максимум при $b\Delta k = 2b\Delta k_s = -4$; $\text{Im}I_k$ имеет абсолютный максимум при $b\Delta k_s = -4$; $b\Delta k_s = -0,333$ и абсолютный минимум при $b\Delta k = -4$, $b\Delta k_s = -3,667$, равные по абсолютной величине.

Для каскадных процессов $\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_l \rightarrow \omega_s$, $\omega_m \pm \omega_p - \omega_s \rightarrow \omega_6$ (с вычитанием частоты ω_s на втором этапе) в выражении (23) следует заменить

$$e^{-i\frac{b\Delta k_s}{2}(\xi'' - \xi')} , (k_s'' - ik_s' \xi'') , Q_s(\xi'') , H_s(\xi' , \xi')$$

на комплексно-сопряженные и перед всем выражением поставить знак минус; при этом

$$Q_6^{(s)}(\xi') = (1 - i\xi') \begin{cases} (1 + i\xi')^{-2}, & \omega_6 = \omega_m + \omega_p - \omega_s \\ (1 + \xi'^2)^{-1}, & \omega_6 = \omega_m - \omega_p - \omega_s \end{cases}$$

Суммарное генерируемое поле $\tilde{E}_6(\mathbf{r})$ на частоте ω_6 можно записать в виде $\tilde{E}_6(\mathbf{r}) = E_6(\mathbf{r}) + \sum_s E_6^{(s)}(\mathbf{r}) = \text{Re} \tilde{E}_6 + i \text{Im} \tilde{E}_6$, где для $E_6(\mathbf{r})$ справедливо (9) и суммирование по s включает все возможные каскадные процессы (22). Следует отметить, что величина $E_6^{(s)}$ может быть одного порядка с E_6 [8], а в некоторых случаях даже превосходить эту величину, например, при генерации пятой гармоники в условиях двухфотонного резонанса. В этом случае для каскадного процесса $\omega + \omega + \omega \rightarrow 3\omega$, $\omega + \omega + 3\omega \rightarrow 5\omega$ характерно наличие двойного резонансного выигрыша. Обсуждение резонансных процессов выходит за рамки данной работы и будет опубликовано позже.

Итак, в работе рассмотрены характерные особенности смещения частот в сфокусированных пучках на нелинейной восприимчивости пятого порядка и получен ряд результатов и выводов. Сравнение с аналогичными результатами для процессов на низших нелинейностях [1—6] показывает, что с ростом порядка нелинейного процесса эффективность фокусировки возрастает, зависимость мощности от величины конфокального параметра становится более резкой, а основной вклад в генерацию при жесткой фокусировке дает все более короткая область вблизи фокуса пучков. Для $n \geq 3$, где n — порядок нелинейной восприимчивости, длина этой области $L_{\text{эфф}}^{(n)} \sim (10^{\frac{4}{n-1}} - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{k''}{k'} b$. В отличие от [5], в данной работе показано, что при слабой фокусировке (выражение (13)) эффективность преобразования зависит от отношения $\frac{k''}{k'}$; этот вывод справедлив и для процессов на восприимчивости третьего порядка, рассмотренных в работе [5]. Отметим, что для этих процессов в случае жесткой фокусировки можно получить аналитические решения типа (16), справедливые при длине нелинейной среды $L \geq L_{\text{эфф}}^{(3)} \sim 10 \frac{k''}{k'} b$.

Приведем конкретную оценку мощности пятой гармоники от излучения неодимового лазера в парах натрия. Расчет дает значения $\chi^{(5)} \sim 10^{-44}$ СГСЭ·см³, $\Delta k \sim -7,2 \cdot 10^{-17}$ Н см⁻¹. Задаваясь $N \sim 5 \cdot 10^{16}$ см⁻³, $P_1 \sim 10^8$ Вт и $b \sim 3$ см ($b\Delta k \sim -11$), при длине кюветы $L \geq 10$ см из (11), (16,1) получаем $P_6(5\omega) \sim 3 \cdot 10^3$ Вт.

Приведем конкретную оценку мощности пятой гармоники от излучения неодимового лазера в парах натрия. Расчет дает значения $\chi^{(5)} \sim 10^{-44}$ СГСЭ·см³, $\Delta k \sim -7,2 \cdot 10^{-17}$ Н см⁻¹. Задаваясь $N \sim 5 \cdot 10^{16}$ см⁻³, $P_1 \sim 10^8$ Вт и $b \sim 3$ см ($b\Delta k \sim -11$), при длине кюветы $L \geq 10$ см из (11), (16,1) получаем $P_6(5\omega) \sim 3 \cdot 10^3$ Вт.

Автор весьма признателен С. А. Ахманову и К. Н. Драбовичу за поддержку и интерес к работе, а также С. Г. Гребенюку за помощь по программированию и счету на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сухоруков А. П. «Изв. вузов. Радиофизика», 1966, № 9, 116.
2. Kleinman D. A., Ashkin A., Boyd J. D. «Phys. Rev.», 1966, 145, 338.
3. Сухоруков А. П., Томов И. В. ЖЭТФ, 1970, 58, 1626.
4. Miles R. B., Harris S. E. IEEE, 1970, QE-9, 470.
5. Bjorklund G. C. IEEE, 1975, QE-11, 287.
6. Ward J. F., New G. H. C. «Phys. Rev.», 1968, 185, 57.
7. Томов И. В., Richardson M. C. IEEE, 1976, QE-12, 521.
8. Ахманов С. А., Дубовик А. Н., Магницкий С. А., Салтиел С. М., Томов И. В., Тункин В. Г. Тезисы докладов на VII Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике. Ташкент, 1974.
9. Harris S. E. «Phys. Rev. Lett.», 1973, 31, 341.
10. Ахманов С. А., Дубовик А. Н., Салтиел С. М., Томов И. В., Тункин В. Г. «Письма в ЖЭТФ», 1974, 20, 264.
11. Ахманов С. А., Мартынов В. А., Салтиел С. М., Тункин В. Г. «Письма в ЖЭТФ», 1975, 22, 143.
12. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.

Поступила в редакцию
28.1.1977 г.
Кафедра
общей физики для мехмата