

Определенная зондовым методом температура электронов не изменяется при увеличении магнитного поля и поэтому не характеризует частоту ионизации. В настоящей работе вклад ступенчатой ионизации в полную ионизацию не определялся. Однако в условиях эксперимента независимо от относительной роли ступенчатой ионизации рассчитанные значения частоты ионизации электронным ударом из основного состояния с использованием температуры «медленных» электронов превышают измеренные в 2,5—7 раз. Это свидетельствует о том, что функция распределения электронов в области энергий $\varepsilon \geq 20$ эВ обеднена по сравнению с максвелловской; с ростом внешнего магнитного поля дефицит «быстрых» электронов функции распределения увеличивается. Таким образом, полученные результаты указывают на специфику ВЧ асимметричного разряда, в котором частота ионизации уменьшается с ростом магнитного поля вследствие уменьшения доли «быстрых» электронов функции распределения, а не их средней энергии, как это имеет место в положительном столбе разряда постоянного тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский В. Л. Электрический ток в газе. М., 1971.
2. Вагнер С. Д., Виролайнен В. А., Каган Ю. М., Калмыкова Т. А. ЖТФ, 1974, 44, 468.
3. Горяга Г. И., Кузокников А. А., Квашонкин В. И., Ярамышев Г. С. Рукоп. Деп. в ВИНТИ, № 1601—74 от 13 июня 1974 г.
4. Shulz J., Brown S. C. «Phys. Rev.», 1955, 98, 1642.
5. Каган Ю. М., Перель В. И. ЖТФ, 1968, 38, 10.

Поступила в редакцию
19.10 1976 г.
Кафедра
электроники

УДК 517.91/943

Г. Н. Медведев
Б. И. Моргунов

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, СОДЕРЖАЩИХ МЕДЛЕННЫЕ И БЫСТРЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Постановка задачи. Рассматривается система интегродифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, \tilde{x}, \psi, \tilde{\psi}, \int_0^t f(x(s), \tilde{x}(s), \psi(s), \tilde{\psi}(s), s, t, \varepsilon) ds, \varepsilon), \quad (1)$$

$$\dot{\psi} = \omega(x) + \varepsilon \Psi(x, \tilde{x}, \psi, \tilde{\psi}, \int_0^t g(x(s), \tilde{x}(s), \psi(s), \tilde{\psi}(s), s, t, \varepsilon) ds, \varepsilon),$$

где x, X и ψ, Ψ — векторные функции, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\Delta > 0$ (запаздывание) — постоянная величина. Если ψ (фаза) — скаляр, то систему (1) называют системой с быстро вращающейся фазой. В системе (1) использованы и в дальнейшем применяются обозначения: $\tilde{x} = x(t - \Delta)$, $\tilde{\psi} = \psi(t - \Delta)$, $\tilde{x}(s) = x(s - \Delta)$, $\tilde{\psi}(s) = \psi(s - \Delta)$.

Схема усреднения для системы (1) без запаздывания была предложена и обоснована в работах А. Н. Филатова [1, 2].

Целью настоящей статьи является, во-первых, разработка и обоснование метода усреднения для систем (1) с быстро вращающейся фазой и запаздыванием, а также обоснование алгоритма построения высших приближений системы (1), что необходимо для получения приближенных значений не только медленных переменных x , но и быстрой фазы ψ .

Во-вторых, исследуются резонансные явления в системах вида (1). С помощью специализированной схемы усреднения, предложенной В. М. Волосовым и Б. И. Моргуновым [3] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, осуществляется переход к усредненной системе, вычисляются стационарные резонансные значения переменных и исследуется устойчивость стационарных резонансных режимов на асимптотически большом промежутке времени.

Основные результаты.

Усреднение и высшие приближения в системах с быстро вращающейся фазой (ψ -скаляр). Для построения высших приближений решений системы (1), следуя [3], введем новые переменные ξ и φ по формулам

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon u_1(\xi, \varphi, \tilde{\varphi}, t) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \varphi, \tilde{\varphi}, t) + \dots, \\ \psi &= \varphi + \varepsilon \vartheta_1(\xi, \varphi, \tilde{\varphi}, t) + \varepsilon^2 \vartheta_2(\xi, \varphi, \tilde{\varphi}, t) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\tilde{\varphi} = \varphi(t - \Delta)$, $\tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi(t - 2\Delta)$ и т. д., ξ и φ определяются системой усредненных уравнений

$$\dot{\xi} = \varepsilon \bar{X}_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \dots; \quad \dot{\varphi} = \omega(\xi) + \varepsilon B_1(\xi) + \dots, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_1(\xi, \xi, \omega(\xi)t, \omega(\xi)(t - \Delta), \\ &\quad \int_0^t f_1(\xi, \xi, \omega(\xi)s, \omega(\xi)(s - \Delta), s, t) ds) dt, \\ X_1 &= X|_{\varepsilon=0}, \quad f_1 = f|_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференцируя формулы (2) в силу уравнений (3), подставляя в (1), разлагая по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем систему для последовательного определения функций u_1, B_1, u_2, A_2 и т. д.

Для функции u_1 получаем, в частности, следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{\varphi}} \omega &= X_1 \left(\xi, \xi, \varphi, \tilde{\varphi}, \int_0^t f_1(\xi, \xi, \omega s, \omega(s - \Delta), s, t) ds \right) - \\ &\quad - \bar{X}_1(\xi). \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega = \omega(\xi)$. Функции A_2, B_1 и т. д. определяются как средние вида (4) от ряда известных правых частей системы (1).

Сформулируем основные требования теоремы о втором приближении.

Функции $X(x, \tilde{x}, \psi, \tilde{\psi}, z, t, \varepsilon)$, $\Psi(x, \tilde{x}, \psi, \tilde{\psi}, z, t, \varepsilon)$, $f(x, \tilde{x}, \psi, \tilde{\psi}, z, t, \varepsilon)$, $g(x, \tilde{x}, \psi, \tilde{\psi}, z, t, \varepsilon)$ определены, непрерывны и равномерно ограничены в некоторых областях изменения своих аргументов вместе с частными производными по всем аргументам до второго порядка включительно.

Кроме того, выполнены условия

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial x} \right| &\leq \mu(t, s), \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \right| \leq \mu(t, s), \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \psi} \right| \leq \mu(t, s), \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \tilde{\psi}} \right| \leq \mu(t, s), \\ \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) ds &\leq ct, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) [|s - t| + |s - t|^2 + s^4] \leq t^2 \psi(t),$$

где $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Равномерно по отношению к ξ в некоторой области переменных ξ существуют пределы — средние значения вида (4) для ряда известных функций правых частей системы (1). На сегменте $[0, L/\varepsilon]$, где L — сколь угодно большое положительное число, существует единственное решение усредненной системы второго приближения

$$\dot{\xi} = \varepsilon \bar{X}_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi), \quad \dot{\varphi} = \omega(\xi) + \varepsilon B_1(\xi).$$

При соблюдении этих условий равномерно в промежутке $[0, L/\varepsilon]$ выполняются оценки $|x - \xi - \varepsilon u_1| \leq \varepsilon \alpha(\varepsilon)$, $|\varphi - \varphi_1| \leq \alpha(\varepsilon)$, где $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, ξ — решение усредненной системы второго приближения, совпадающее при $t=0$ с решением системы (1), а u_1 — решение уравнения (5).

В аналогичных терминах с более жесткими требованиями, в том числе и к функциям $\mu(t, s)$, в условиях (6) формулируются теоремы о высших приближениях.

Исследование резонансных явлений в системах (1) (ψ — m -мерный вектор). Резонансом в системе (1) будем называть случай, когда для некоторого x_0 найдется отличный от нуля целочисленный вектор N , такой, что $N\omega(x_0) = 0$, $\omega(x_0) \neq 0$. Согласно работе [3] введем новые переменные (фазовые расстройки) $\varphi_j = N_j \psi$, где $j = 1, 2, \dots, r$, $r \leq m$; N_j — базисная система для совокупности векторов N . Обозначим остальные переменные ψ с точностью до некоторых числовых множителей величинами β . Произведем в преобразованной системе согласно [3] замену переменных следующего вида:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon \delta x + z + \varepsilon u^{(1)}(\psi, \tilde{\psi}, \beta, \tilde{\beta}) + \varepsilon u^{(2)}(\psi, \tilde{\psi}, \beta, \tilde{\beta})z, \\ \varphi &= \varphi_0 + y + \varepsilon v^{(1)}(\psi, \tilde{\psi}, \beta, \tilde{\beta}) + \varepsilon v^{(2)}(\psi, \tilde{\psi}, \beta, \tilde{\beta})z, \end{aligned} \quad (7)$$

где z, y — новые переменные, $\psi = \varphi_0 + y$, x_0, φ_0 — постоянные, удовлетворяющие уравнениям

$$\bar{X}_1(x_0, \varphi_0) = 0, \quad (8)$$

$$N_j \omega(x_0) = 0, \quad X_1 = X|_{\varepsilon=0}, \quad f_1 = f|_{\varepsilon=0}.$$

Уравнения для функций $u^{(i)}, v^{(i)}$ ($i=1, 2$) аналогичны уравнению (5), δx — постоянная, определяемая из линейного уравнения, когда определены x_0, φ_0 (см. [3]). Уравнения (8) представляют собой систему уравнений для определения в нулевом приближении координат стационарной точки (x_0, φ_0) . Система (8) предполагается разрешимой, выбирается некоторое ее решение (x_0, φ_0) ; в окрестности которого исследуется устойчивость стационарного режима. Переменные z и y удовлетворяют системе в вариациях, которая при условии достаточной малости z и y на начальном множестве (а именно, $z, y \sim 0(\varepsilon)$ при $t_0 - 2\Delta \leq t \leq t_0$) приводится к виду, указанному в [3]:

$$\dot{u} = M(\varepsilon)u + \varepsilon F(u, t, \varepsilon), \quad (9)$$

где $u = \{z, y\}$. Исследование стационарного режима на устойчивость проводится согласно [3] и сводится к вопросу устойчивости тривиального решения системы в вариациях (9). Сформулируем основные требования теоремы об устойчивости стационарного резонансного режима на асимптотически большом промежутке времени.

Функции X, Ψ, f, g удовлетворяют условиям гладкости, условиям (6), требованиям существования средних значений, перечисленным в предыдущем пункте. Существует стационарная точка (x_0, φ_0) — решение системы (8), существуют ограниченные решения уравнений для функций $u^{(i)}, v^{(i)}$. Для матрицы $M(\varepsilon)$ и функции $F(u, t, \varepsilon)$ системы в вариациях (9) выполнены условия, обеспечивающие устойчивость тривиального решения системы (9) на асимптотически большом промежутке времени

$$\Delta t \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (\text{см. [3]}).$$

При выполнении перечисленных условий существуют такие положительные постоянные $C_1, C_2, \varepsilon_0, \delta$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $0 \leq t < \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}}$ решение системы (9) с

начальными условиями $\|u(t_0)\| \leq \delta \varepsilon$ удовлетворяет для всех $0 \leq t < \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}}$ неравенству $\|u(t)\| < C_2 \sqrt{\varepsilon}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филатов А. Н. Усреднение в системах дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Ташкент, 1967.
2. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент, 1971.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.

Поступила в редакцию
6.7 1976 г.
Кафедра
математики

УДК 621.385.69

А. И. Костиенко
А. Ф. Королев

К ОЦЕНКЕ ОБЛАСТИ ГЕНЕРАЦИИ ПРИБОРОВ С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ

При взаимодействии электронов, вращающихся в магнитном поле с электромагнитным излучением важную роль играет соотношение между частотой внешнего поля ω и собственной частотой системы ω_n [1, 2].

В данной работе обсуждается роль неэквидистантности энергетических уровней в таких системах (это затрагивается также в [3]) и дается оценка области, в которой вынужденное излучение превосходит поглощение. Анализ проводится на базе квазиклассических представлений, развитых в работах [4, 5].

В [5] было показано, что анализ предельных условий, при которых мощность излучения пучка электронов, вращающихся в магнитном поле, превышает поглощаемую ими мощность, позволяет оценить полную мощность излучения и электронный к. п. д. приборов, использующих потоки вращающихся электронов. Покажем, что на этой же основе можно оценить область частот, в которой возможна генерация.

Предельным условием индуцированного излучения является равенство [5]:

$$1 + \frac{4W_{\perp}}{m_0 c^2} \frac{\tau \Omega x}{1 + x^2} = 0, \quad (1)$$

где $W_{\perp}$ — «поперечная» энергия электронов, τ — время жизни, Ω — циклотронная частота, m_0 — масса электрона, ω_n — собственная частота системы, ω — частота внешнего поля, $x = 2\tau(\omega_n - \omega)$.

Перепишем условие (1) в виде квадратного трехчлена

$$x^2 + bx + 1 = 0, \quad (1 + x^2) > 0,$$

где

$$b = 4W_{\perp} \tau \Omega / m_0 c^2. \quad (2)$$

Решение (2) относительно x имеет вид

$$x = -\frac{2W_{\perp} \tau \Omega}{m_0 c^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2W_{\perp} \tau \Omega}{m_0 c^2}\right)^2 - 1}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для x , получим

$$\omega = \Omega \pm \frac{1}{2\tau} \sqrt{\left(\frac{2W_{\perp} \tau \Omega}{m_0 c^2}\right)^2 - 1}. \quad (4)$$

Дадим численную оценку полученного выражения. Запишем значения входящих в него величин, характерные для работы рассматриваемого типа приборов: $W_{\perp} = 10^4$ эВ, $\tau = 1,04 \cdot 10^{-9}$ с, $\Omega = 10^{11}$ рад/с. Тогда $\left(\frac{2W_{\perp} \tau \Omega}{m_0 c^2}\right)^2 \sim 16$, и, следовательно, единицей под корнем в формуле (4) можно пренебречь. Из выражения (4) видно, что генерация идет на частотах, отличных от собственных частот ω_n . Отличие же крайних частот от цик-