Решением этого уравнения с учетом численных оценок, данных при анализе формулы (4), является

$$\Omega + \frac{\beta_{\perp}^2 \Omega}{2} > \omega > \Omega - \frac{\beta_{\perp}^2 \Omega}{2}, \tag{10}$$

т. е. соотношение, совершенное аналогичное (6). Этот результат в достаточной степени очевиден, но тем не менее формально подтверждает приведенные выше рассуждения о роли неэквидистантности энергетических уровней в рассматриваемой системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schneider J. «Phys. Rev. Lett.», 1959, 2, 504.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. Синхротронное излучение. М., 1966.
3. Гапонов А. В., Петелин И. М., Юлпатов В. К. «Изв. вузов. Радиофизика», 1967, № 9—10, 1414—1453.
4. Костиенко А. И., Королев А. Ф. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1973, 14, № 1, 48.
5. Костиенко А. И., Королев А. Ф. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1975, 16, № 2, 241.

Поступила в редакцию
15.12 1976 г.
Кафедра
радиофизики

УДК 621.374.4

М. Д. Карасев

НЕЛИНЕЙНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ В БОЛЬШОЕ ЧИСЛО РАЗ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ ВРЕМЕНИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В [1] рассмотрено деление частоты в большое число раз с помощью высокодобротной резонансной системы, кратковременно взаимодействующей с гармонической внешней силой делимой частоты. При этом фаза и длительность взаимодействия зависели от амплитуды колебаний высокодобротной резонансной системы. Такое деление частоты было реализовано на электромеханической модели баланса часов [2]. Эксперименты с моделью позволили установить, что с помощью одного резонатора можно получить деление частоты в 10^2 раз, устойчиво сохраняющееся как при значительной нестабильности амплитуды внешнего гармонического воздействия, так и при наличии механических возмущающих вибраций. Недостатками деления частоты способом, рассмотренным в [1] и реализованным в [2], являются большое потребление энергии на делимой частоте и большие размеры устройства электромеханического взаимодействия. Этих недостатков можно избежать, установив в системе деления частоты фиксированную длительность взаимодействия резонансной системы с внешней силой делимой частоты.

При фиксированном времени взаимодействия исходные уравнения [1] останутся неизменными. Как и в [1], будем считать, что внешнее воздействие $P(x, \dot{x})\cos\omega t$ в уравнении

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^2[1 - \gamma(x)]\,x = P(x, \dot{x})\cos\omega t \tag{1}$$

имеет кратковременный характер и совершается у положения равновесия, $x=0$. Но положим, что только начало воздействия внешней силы определяется фиксированной координатой (при $x=0$), окончание же воздействия происходит по истечении фиксированного промежутка времени τ и будет иметь место при смещении Δx_τ, зависящем от амплитуды колебаний. Пусть

$$P(x, \dot{x}) = P_0[\sigma_0(x) - \sigma_0(x - \Delta x_\tau)], \tag{2}$$

где $x = A\sin(\Omega t - \varphi)$, $\Omega = \omega/n$, $n \gg 1$, при этом $(\tau/T) \ll 1$, где $T = 2\pi/\Omega$.

Учитывая неравенства $(\tau/(T)\ll 1$ и $n\ll 1$, можно положить $\Delta x_\tau \cong A\Omega\tau$ и вычислить $P_1(A, \varphi)$, $P_2(A, \varphi)$ — амплитуды косинусоидальной и синусоидальной составляющих внешнего воздействия на частоте Ω:

$$\begin{aligned} P_1(A, \varphi) &= \overline{P(x, \dot{x})\cos\omega t\cos\Omega t}, \\ P_2(A, \varphi) &= \overline{P(x, \dot{x})\cos\omega t\sin\Omega t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Они имеют вид

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{P_0}{\pi m}\left(M\cos\varphi - \frac{1}{m}N\sin\varphi\right), \\ P_2 &= \frac{P_0}{\pi m}\left(M\sin\varphi + \frac{1}{m}N\cos\varphi\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$M = \cos m\varphi\sin\omega\tau - \sin m\varphi\, 2\sin^2\frac{\omega\tau}{2} = \sin(m\varphi + \omega\tau) - \sin m\varphi;$$

$$N = -\cos m\varphi + \cos(m\varphi + \omega\tau) + \omega\tau\sin(m\varphi + \omega\tau).$$

В укороченных уравнениях

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\delta A + \frac{P_1(A, \varphi)\cos\varphi + P_2(A, \varphi)\sin\varphi}{2\Omega}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{2\Omega} + \frac{\gamma(A)}{2\Omega} + \frac{P_2(A, \varphi)\cos\varphi - P_1(A, \varphi)\sin\varphi}{2\Omega A}, \end{aligned} \tag{5}$$

величины M и N разделяются и входят по отдельности: M в выражение $\dot{A}$, а N в $\dot{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\delta A + \frac{P_0}{2\pi\omega}M \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{2\Omega} + \frac{\gamma(A)}{2\Omega} + \frac{P_0}{2\pi\omega A m}N. \end{aligned} \tag{6}$$

Целое число k периодов взаимодействия внешней силы с резонатором (т. е. $\omega\tau = 2\pi k$) не дает вклада энергии в резонатор, $M=0$. Наиболее эффективное и экономичное взаимодействие происходит при $\omega\tau=\pi$, когда

$$M = -2\sin m\varphi, \tag{7}$$

$$N = -2\cos m\varphi - \pi\sin m\varphi. \tag{8}$$

В выражения (5) для амплитуд P_1 и P_2 величина N входит с множителем $1/m$, т. е. ее вклад в m раз меньше влияния слагаемого M. Стационарная устойчивая частота определяется главным образом нелинейностью $\gamma(A)$ и только при $\gamma(A)=\text{const}$ или при очень малой амплитуде A следует принимать во внимание влияние N. Следовательно, приближенно можно считать

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\delta A - \frac{P_0}{\pi\omega}\sin m\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{2\Omega} + \frac{\gamma(A)}{2\Omega}. \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что, в отличие от случая (1), здесь при любой величине P_0 амплитуды внешнего воздействия существует область $m\Delta\varphi$ с устойчивыми амплитудами колебаний от нуля до A_m, удовлетворяющей равенству

$$A_m = \frac{P_0}{\pi\omega\delta}.$$

Все остальные особенности деления частоты при больших амплитудах A сохраняются такими же, как в (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Карасев М. Д. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1974, 15, № 3.
2. Белов А. А., Карасев М. Д. и др. «Труды НИИчаспром», вып. 22, 1976.

Поступила в редакцию
21.2 1977 г.
Кафедра
физики колебаний

УДК 539.1.01

Ю. М. Лоскутов
В. В. Скобелев

О РАСЧЕТЕ ПЕТЛЕВЫХ ДИАГРАММ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С наличием петлевых диаграмм в графиках Фейнмана, сопоставляемых тем или иным процессам, связаны, как известно, нелинейные электродинамические процессы, предсказанные еще Гейзенбергом и Эйлером [1], впервые построившими эффективный нелинейный лагранжиан электромагнитного поля $L_0(F)$. На его основе в низкоэнергетическом приближении были рассмотрены фотон-фотонное рассеяние [2], дельбрюкковское рассеяние [3], расщепление фотона в поле ядра [4] и в магнитном поле [5, 6], рождение фотонов переменным полем [7, 8] и т. д. Недавно в [9] была получена следующая поправка к $L_0(F)$.

Экспериментальное обнаружение нелинейных эффектов связано с большими трудностями; к настоящему времени надежно идентифицированы лишь эффект Дельбрюкка [10, 11] и расщепление γ-квантов в поле ядра [11]. В то же время в сверхсильных магнитных полях $B \gg B_0 (B_0 = m^2/e = 4{\cdot}41{\cdot}10^{13}$ Гс), с большой достоверностью существующих в пульсарах, поляризация вакуума вполне может дать наблюдаемый эффект [5, 6], и, возможно, скажется на эволюции подобных объектов [12]. В этой связи становится актуальной разработка простых методов расчета нелинейных явлений в сильном магнитном поле, когда по существу оно выступает в роли анизотропной среды, делающей движение вакуумных электронов эффективно двумерным (вдоль временной оси и поля). Ниже предлагается один из таких методов.

Рассмотрим в низкоэнергетическом приближении матричный элемент $M_{\gamma n}$, соответствующий петлевой диаграмме с n внешними (и только внешними) фотонными линиями в сильном магнитном поле $B \gg B_0$, когда электронную функцию Грина можно представить в виде [12—15]:

$$G(x, y) \underset{\varkappa}{=} -(\gamma/4\pi)(1 - i\gamma_1\gamma_2) f(x_\perp, y_\perp) G(x_\parallel - y_\parallel), \tag{1}$$

где

$$f(x_\perp, y_\perp) = \exp\left\{-\frac{\gamma}{4}\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2i(x_1 + y_1)(x_2 - y_2)\right]\right\}, \tag{2}$$

$$G(z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k\, \frac{\hat{k} + m}{k^2 - m^2}\, e^{-i(kz)_\parallel}, \qquad (kz)_\parallel = k_0 z_0 - k_3 z_3, \tag{3}$$

$$\hat{k} = k_0\gamma_0 - k_3\gamma_3, \quad \gamma = |eB|.$$

Во-первых, заметим, что интегрирование в $M_{\gamma n}$ по переменным двумерного пространства (0,3) приводит к таким же результатам, как в случае без поля ($B=0$). Во-вторых, из-за фактора $\frac{1}{2}(1 - i\gamma_1\gamma_2)$ все суммы по поляризациям фотонов в $M_{\gamma n}$ становятся двумерными. Вследствие этого их произведение может быть заменено в итоге (с учетом операции шпурования) множителем 1/2. Далее, замечая, что

$$\frac{\gamma}{2\pi}\int d^2z_\perp f(x_\perp, z_\perp) f(z_\perp, y_\perp)\, e^{i\varkappa_\perp z_\perp} = f(x_\perp, y_\perp)\, \varphi(x_\perp, y_\perp)\, e^{\frac{i}{2}\varkappa_\perp(x_\perp + y_\perp)}, \tag{4}$$

где в указанном приближении множитель $\varphi(x_\perp, y_\perp)$ оказывается несущественным, поскольку после интегрирования по всем «поперечным» координатам он обращается в