УДК 530.12

В. И. Денисов

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ВНУТРИ СФЕРИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РЕЗОНАТОРА

В статье показано, что амплитуда стоячих гравитационных волн внутри сферического резонатора на порядок больше амплитуды гравитационного поля в концентрическом резонаторе. Получены выражения для компонентов гравитационного поля и исследованы различные предельные случаи. Вычисления проводились с точным учетом запаздывания. Рассмотрено влияние среды на процесс излучения стоячих гравитационных волн.

В работе [1] рассматривалось гравитационное излучение системой стоячих электромагнитных волн (ЭМВ), находящихся в концентрическом резонаторе. Анализ полученных результатов показывает, что амплитуда стоячей гравитационной волны (ГВ) увеличивается с уменьшением линейного размера полости резонатора. Поэтому следует ожидать, что амплитуда гравитационного излучения будет максимальна, когда линейный размер полости будет стремиться к нулю, т. е. когда точка наблюдения окажется внутри источника ГВ. Однако оценить амплитуду гравитационного поля стремлением линейного размера полости к нулю нельзя, так как вычисления в работе [1] проводились при условии, что линейный размер полости значительно больше длины ЭМВ в резонаторе. Поэтому возникает необходимость исследовать гравитационное излучение внутри самого сферического электромагнитного резонатора.

Возьмем ту же топографию стоячих ЭМВ в резонаторе, что и в [1]:

$$E_\varphi = E_0 \frac{J_{3/2}\left(\frac{\omega}{c} r\right)}{\sqrt{r}} \sin\theta \cos\omega t,$$

$$H_r = -\frac{2E_0 J_{3/2}\left(\frac{\omega}{c} r\right)}{\frac{\omega}{c} r^{3/2}} \cos\theta \sin\omega t,$$

$$H_\theta = \frac{E_0}{3\sqrt{r}}\left[J_{1/2}\left(\frac{\omega}{c} r\right) - 2J_{5/2}\left(\frac{\omega}{c} r\right)\right] \sin\theta \sin\omega t,$$

$$E_r = E_\theta = H_\varphi = 0, \quad E_0 = 2\pi R \sqrt{\frac{\varepsilon\omega}{c}}, \tag{1}$$

где ε — средняя плотность энергии электромагнитного поля в резонаторе, R — радиус резонатора.

Согласно [2] компоненты гравитационного поля записываются в виде

$$h^{mn} = -\frac{4k}{c^4}\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} T^{mn}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right). \tag{2}$$

Так как точка наблюдения находится внутри источника излучения, то никакой приближенный учет запаздывания здесь применить нельзя, а существенно необходимо произвести точный учет запаздывания. В связи с тем, что нас не интересуют статические члены в компонентах h^{mn}, опустим в (2) статическую часть тензора энергии-импульса и оставим только зависящие от времени слагаемые. Тогда в выражение (2) войдут следующие интегралы:

$$\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tau^{mn}(\mathbf{r}') \sin \frac{2\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}, \tag{3}$$

$$\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tau^{mn}(\mathbf{r}') \cos \frac{2\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}. \tag{4}$$

Интеграл (4) является несобственным интегралом с особой точкой $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$. Однако этот интеграл сходится и притом абсолютно. По определению сходимости несобственного интеграла имеем

$$\int\limits_{V)} \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tau^{mn}(\mathbf{r}') \cos \frac{2\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} = \lim_{V_\varepsilon\to 0} \int\limits_{(V-V_\varepsilon)} \frac{d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}'|} \tau^{mn}(\mathbf{r}') \cos \frac{2\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} \tag{5}$$

и этот предел не зависит от способа стягивания области V_ε^3 к особой точке $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$. Для наших целей удобно в качестве области V_ε выбрать область, заключенную между двумя сферами радиусов $r-\varepsilon$ и $r+\varepsilon$, и потом устремить $\varepsilon\to 0$.

Вычисление компонентов гравитационного поля. Воспользуемся теоремой Гегенбауэра [3] и проинтегрируем выражение (2) с учетом (5). Тогда для компонентов h^{mn} получим:

$$\begin{aligned}
h^{00} &= -\frac{h}{45}\left\{4h_1 + h_5 + \frac{5}{7}(3h_4 - 4h_2) P_2(x)\right\},\\
h^{11} &= h\left\{\frac{2}{45}h_1 + \frac{4}{63}h_2P_2(x) + \frac{4}{35}h_3P_4(x) - \right.\\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{42}h_4P_2^2(x) + \frac{1}{105}h_3P_4^2(x)\right]\cos 2\varphi\right\},\\
h^{33} &= h\left\{\frac{1}{45}h_5 + \frac{1}{63}(3h_4 - 4h_2)P_2(x) - \frac{8}{35}h_3P_4(x)\right\};\\
h^{12} &= -\frac{h}{30}\left\{\frac{5}{7}h_4P_2^2(x) + \frac{2}{7}P_4^2(x)\right\}\sin 2\varphi,\\
h^{13} &= \frac{2h}{45}\left\{\frac{5}{7}h_2P_2^1(x) + \frac{9}{7}h_3P_4^1(x)\right\}\cos\varphi,\\
h^{01} &= \frac{2}{3}h\left\{\left(\frac{1}{5}f_6 - f_7\right)P_1^1(x) - \frac{1}{5}f_8P_3^1(x)\right\}\cos\varphi,\\
h^{03} &= -\frac{2h}{5}\{f_6P_1(x) - f_8P_3(x)\},\quad h^{23} = h^{13}\operatorname{tg}\varphi,\\
h^{02} &= h^{01}\operatorname{tg}\varphi,\quad h^{22} = -h^{00} - h^{11} - h^{33},
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$x = \cos\theta,\ \xi = \frac{2\omega}{c} r,\ h = -\frac{4\pi\sqrt{2\pi}\,\varepsilon R^2 k}{c^4},$$

$$h_i = \sum_{l=0}^{4}\left\{\frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{\xi}}(-1)^l\left[a_{il}(\xi)\,J^{(\xi)}_{-(l+1/2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[b_{il}\left(\frac{2\omega}{c}R\right) - b_{il}(\xi)\right] J^{(\xi)}_{l+1/2}\right] + \frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{\xi}}\, a_{il}\left(\frac{2\omega}{c}R\right) J^{(\xi)}_{l+1/2}\right\}; \tag{7}$$

$$f_i = -\frac{1}{2\omega}\frac{\partial h_i}{\partial t}$$

а $a_{il}(\xi)$ и $b_{il}(\xi)$ — некоторые довольно громоздкие выражения, которые мы здесь выписывать не будем. Для примера приведем $a_{1l}(\xi)$ и $b_{1l}(\xi)$:

$$a_{1l}(\xi) = \left\{-\frac{72\sin\xi}{\xi^4} - \frac{24\cos\xi}{\xi^3} + 12\,\mathrm{Si}(\xi) + \frac{48}{\xi^3} - \frac{12}{\xi} + \right.$$

$$\left. + \sin 2\xi\left[\frac{36}{\xi^4} - \frac{6}{\xi^2}\right] - \frac{24\cos 2\xi}{\xi^3} - 6\,\mathrm{Si}(2\xi)\right\}\delta_0^l;$$

$$b_{1l}(\xi) = \left\{\frac{24\sin\xi}{\xi^3} - \frac{72\cos\xi}{\xi^4} + 12\,\mathrm{Si}(\xi) + \frac{36}{\xi^4} - \frac{30}{\xi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{24\sin 2\xi}{\xi^3} + \cos 2\xi\left[\frac{36}{\xi^4} - \frac{6}{\xi^2}\right] - 6\,\mathrm{Ci}(2\xi) - 6\ln\xi\right\}\delta_0^l. \tag{8}$$

Исследование полученных решений. Из выражения (7) видно, что характер полученных решений существенно зависит от значений ξ, поэтому рассмотрим следующие частные случаи.

1. $\xi \ll 1$, т. е. точка наблюдения находится вблизи центра резонатора. Учитывая, что при $\xi \ll 1$

$$a_{il}(\xi) \sim \xi^{3+l+p_i},\quad p_i > 0,$$

$$b_{il}(\xi) \sim \xi^{2+m_i},\quad m_i > 0,$$

получим

$$h_i = h\sum_{l=0}^{4}\frac{J_{l+1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi}}\left[b_{il}\cos 2\omega t + a_{il}\sin 2\omega t\right] =$$

$$= h\sum_{l=0}^{4}\beta_{il}\,\frac{J_{l+1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi}}\cos(2\omega t + \alpha_{il}), \tag{9}$$

где

$$\beta_{il} = \sqrt{a_{il}^2 + b_{il}^2},\quad \mathrm{tg}\,\alpha_{il} = -\frac{a_{il}}{b_{il}},$$

$$a_{1l} = a_{5l} = 3\pi\delta_0^l,\quad a_{2l} = a_{4l} = 3\pi\delta_2^l,$$

$$a_{7l} = -a_{6l} = \frac{\pi}{2}\delta_1^l,\quad a_{3l} = \frac{\pi}{2}\delta_4^l,\quad a_{8l} = \frac{\pi}{2}\delta_3^l,$$

$$b_{1l} = b_{5l} = -6F\delta_0^l,\quad b_{2l} = b_{4l} = -6F\delta_2^l;$$

$$b_{7l} = -b_{6l} = F\delta_1^l,\quad b_{3l} = -F\delta_4^l,$$

$$b_{8l} = F\delta_3^l, \quad F = C + \ln\left(\frac{2\omega}{c} R\right),$$

C — постоянная Эйлера.

Таким образом, гравитационное излучение вблизи центра электромагнитного резонатора представляет собой стоячую ГВ, которая создается суперпозицией бегущих ГВ, излучаемых диаметрально противоположными элементами объема резонатора. Амплитуда стоячей ГВ равна:

$$\beta_0 = -\frac{8\pi\sqrt{2\pi}\,\varepsilon R^2 k}{c^4}\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \left[C + \ln\left(\frac{2\omega}{c} R\right)\right]^2}. \tag{10}$$

2. $\xi \to \frac{2\omega}{c} R$, т. е. точка наблюдения находится на периферии резонатора. В этом случае (7) запишется в виде

$$h_i = \sum_{l=0}^{4} \frac{a_{il}}{\sqrt{\xi}}\left[(-1)^l \cos 2\omega t J_{-l+1/2}(\xi) + \sin 2\omega t J_{l+1/2}(\xi)\right]. \tag{11}$$

Это выражение удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда и представляет собой волну, бегущую из центра резонатора.

Возможны следующие два случая:

а) $\xi \gg 1$, т. е. точка наблюдения находится на периферии резонатора и расстояние от нее до центра резонатора много больше длины волны. Заменяя функции Бесселя в (11) их асимптотическим выражением, получим

$$h_i = -\frac{2\pi\varepsilon R^2 k\lambda}{c^4}\sum_{l=0}^{4}(-1)^l \psi_{il}\cos\left[2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{\pi l}{2}\right], \tag{12}$$

где

$$\psi_{1l} = \psi_{5l} = \delta_0^l, \quad \psi_{3l} = \delta_4^l, \quad \psi_{8l} = \delta_3^l,$$

$$\psi_{2l} = \psi_{4l} = \delta_2^l, \quad \psi_{7l} = -\psi_{6l} = \delta_1^l;$$

б) $1 < \xi < 10$, т. е. точка наблюдения находится на расстоянии нескольких длин волн от центра резонатора. В этом случае амплитуда ГВ равна

$$h_0 = -\frac{4\pi^2\sqrt{2\pi}\,\varepsilon R^2 k}{c^4}. \tag{13}$$

Отметим, что выражение (11) справедливо и для точек наблюдения, находящихся вне резонатора, тогда выражение (12) будет описывать гравитационное излучение в волновой зоне, а (13) — в ближней зоне.

3. При промежуточных значениях ξ: $0 \ll \xi \ll \frac{2\omega}{c} R$, т. е. когда точка наблюдения находится далеко от центра резонатора, но и не достигла еще периферии резонатора, гравитационное поле состоит из бегущих и стоячих ГВ, причем при приближении к центру резонатора амплитуда стоящих ГВ растет, а бегущих ГВ уменьшается, и наоборот.

Обсуждение результатов. Приведем численные оценки амплитуды ГВ внутри сферического электромагнитного резонатора для всех рассмотренных случаев. Возьмем $R = 10^3$ см, $\varepsilon = 10^{10}$ эрг/см^3,

1. $\xi \ll 1$.

Из выражения (10) видно, что при фиксированных ε и R для увеличения амплитуды выгодно увеличивать ω. Так, в диапазоне СВЧ ($\lambda \sim 2\pi$ см) $\beta_0 = 4{,}3 \cdot 10^{-31}$, а в оптическом диапазоне ($\lambda \sim 2\pi \cdot 10^{-5}$ см) $\beta_0 = 9{,}4 \cdot 10^{-31}$, что вдвое больше, чем на СВЧ, и почти на порядок больше, чем амплитуда стоячей ГВ в концентрическом резонаторе [1].

2. $\xi \to \frac{2\omega R}{c}$.

а) $\xi \gg 1$. Подставим в (12) $\frac{\lambda}{r} \sim 10^{-1}$, что соответствует $\xi = 40\pi$. Тогда получим $h_i \leqslant 5{,}2 \cdot 10^{-33}$ во всей волновой зоне.

б) $1 < \xi < 10$. Учтем, что $\xi \to \frac{2\omega R}{c} = 2x_{3/2,m}$, где $x_{3/2,m}$ — m-й корень функции Бесселя $J_{3/2}(x)$. Поэтому условие $1 < \xi < 10$ требует выбора минимального корня, т. е. $x_{3/2,1} \approx 4{,}5$. Отсюда следует, что $h_i \leqslant 1{,}6 \cdot 10^{-32}$ в этой области. Таким образом, амплитуда ГВ внутри сферического резонатора больше амплитуды ГВ от этого же резонатора, но вне его. По-видимому, детектирование ГВ внутри сферического электромагнитного резонатора их создающего имеет больше преимуществ по сравнению с детектированием ГВ в волновой зоне, так как амплитуда ГВ внутри резонатора существенно больше амплитуды в волновой зоне. При этом если резонатор поместить во внешнее постоянное магнитное поле, то будет происходить резонансное превращение гравитонов частоты 2ω в фотоны той же частоты [4], и их легко выделить на фоне стоячей ЭМВ, которая имеет частоту ω.

Тот факт, что амплитуда стоячей ГВ внутри резонатора существенно больше амплитуды бегущей ГВ вне резонатора и притом возрастает с ростом частоты, можно объяснить следующим образом: источником ГВ является тензор энергии-импульса стоячей ЭМВ. Зависимость поля $\mathbf{E}$ в радиальном направлении описывается функцией $\frac{1}{\sqrt{r}} J_{3/2}\left(\frac{\omega}{c} r\right)$, причем $r = R$ является одним из нулей этой функции. Но функция Бесселя является тем свойством, что разность между двумя соседними большими корнями $x_{3/2,n+1}$ и $x_{3/2,n}$ равна

$$\Delta_1 = \pi + \frac{4}{(2n+1)(2n+3)\pi} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (14)$$

и, кроме того, разность между корнем $x_{3/2,m}$, $m \gg n^2$ и $x_{3/2,n}$ равна

$$\Delta_{m-n} = (m-n)\pi + \frac{2}{(2n+1)\pi} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad (15)$$

т. е. при $n > 10$ корни располагаются почти регулярно и на расстоянии π друг от друга, поэтому поле E_φ в этой области достаточно хорошо описывается косинусоидой с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ и фазой, слабо зависящей от r. То же самое можно сказать и о компоненте магнитного поля H_θ; при $\frac{\omega}{c} r \gg 1$;

$$H_r \sim o\left(\frac{1}{\frac{\omega}{c} r}\right).$$

Известно, что любую стоячую волну можно представить в виде суперпозиции двух волн, бегущих в противоположных направлениях.

Поэтому поля (1) стоячей ЭМВ при $\frac{\omega}{c} r \gg 1$ будут достаточно хорошо описываться полями E_φ и $H_\theta \sim \frac{1}{r} \cos \omega \left(t \pm \frac{r}{c} \right)$ двух ЭМВ, бегущих в радиальном направлении в разные стороны. Но в этом случае происходит эффект Герценштейна [5], т. е. когерентное усиление ГВ, идущих в радиальном направлении. В окрестности малых корней функции Бесселя эта когерентность нарушается, так как расстояние между корнями становится существенно больше π и эти участки начинают давать вклад в ГВ, идущую в радиальном направлении, не в фазе, что ухудшает эффект. Поэтому для увеличения амплитуды стоячей ГВ необходимо, чтобы эти участки с несколькими первыми корнями ($r \sim 5\lambda$) занимали возможно меньший объем в резонаторе, а это достигается при заданном R только увеличением ω.

Таким образом, весь объем резонатора за исключением $V \sim 125 \lambda^3$ излучает ГВ, которые приходят по всем радиальным направлениям в центр резонатора с одинаковой фазой, в результате чего амплитуда стоячей ГВ возрастет. Для бегущих ГВ вне резонатора не существует направления, по которому весь или почти весь объем излучал бы ГВ когерентно. Отметим, что в силу (14) при $\frac{\omega}{c} r \gg 1$ поля бегущих в радиальном направлении сферических ЭМВ формально совпадают с полями бегущих волн в среде, для которой показатель преломления $\varepsilon < 1$. Действительно, разность между фазой бегущей ЭМВ и фазой рожденной ею ГВ растет при их движении в радиальном направлении. Эта формальная аналогия позволяет выявить следующие различия между процессом излучения ГВ бегущими плоскими ЭМВ и процессом излучения ГВ стоячими ЭМВ в резонаторе.

1. В вакууме первый процесс происходит когерентно, второй же не в полной мере.

2. С ростом показателя преломления ε происходит нарушение когерентности излучения ГВ в первом процессе и амплитуда рожденной ГВ уменьшается с ростом ε. Во втором же процессе с ростом ε амплитуда ГВ растет, проходит через максимум при некотором ε_1, зависящем от $\omega/c R$, и при дальнейшем увеличении начинает уменьшаться.

В заключение выражаю благодарность проф. Я. П. Терлецкому за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов В. И. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1976, 17, № 5.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., 1949.
4. Тернов И. М., Халилов В. Р. В сб.: Классическая и квантовая теория гравитации. Минск, 1976.
5. Герценштейн М. Е. ЖЭТФ, 1961, 41, 113.

Поступила в редакцию
20.10 1976 г.
Кафедра
теоретической физики