УДК 521.134

Ю. В. Баркин

ПЛОСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Доказано существование периодических решений Пуанкаре в задаче о плоском поступательно-вращательном движении двух твердых тел, обладающих общей плоскостью динамической симметрии. Проводится качественный и численный анализ аналитических условий существования периодических решений. Рассматривается синхронное движение двух подобных эллипсоидов.

Настоящая работа является продолжением ранее начатого исследования [1], в котором методом малого параметра Пуанкаре исследовалось существование периодических решений в задаче о плоском поступательно-вращательном движении твердого тела в поле притяжения шара. В этой работе было доказано, что периодические движения по орбитам конечного эксцентриситета существуют для твердых тел, характеризуемых определенным значением динамического параметра $\delta = \frac{B-C}{B-A}$, где A, B, C — главные центральные моменты тела. В частности, для движений, подобных лунным (соизмеримость во вращательном и орбитальном движениях 1:1), параметр δ имеет значение, близкое к 3/2, что соответствует реальному движению Луны. Это позволило получить теоретические значения для других тел солнечной системы: Меркурия, Фобоса, Деймоса, Япета, Каллисто и т. д., движение которых соответствует изучаемым периодическим поступательно-вращательным движениям.

В природе существуют динамические системы двух тел, в которых следует учитывать отличие обоих компонентов от сферических и изучать их взаимное влияние друг на друга. К таким системам в первую очередь следует отнести широкий класс двойных эллиптических звездных систем, у которых компоненты в первом приближении представляются трехосными эллипсоидами, большие полуоси которых направлены по линии, соединяющей центры масс звезд [2].

В настоящей работе исследуется существование периодических решений в задаче о плоском поступательно-вращательном движении двух твердых тел M_1 и M_2, обладающих плоскостями динамической симметрии, которые во все время движения совпадают с неизменяемой плоскостью орбиты.

Движение тел описывается каноническими оскулирующими элементами [1, 3]. Методом Пуанкаре получены аналитические условия существования периодических движений тел M_1, M_2 по орбитам конечного эксцентриситета. Проведен качественный анализ порождающих решений. В случае синхронных поступательно-вращательных движений тел M_1, M_2, представляемых подобными однородными эллипсоидами, результаты работы сопоставляются с соответствующими результатами теорий Дарвина и Чендрасекхара.

§ 1. Постановка задачи. Уравнения движения

Рассмотрим поступательно-вращательное движение двух твердых тел M_1 и M_2, обладающих плоскостями динамической симметрии. Сделаем предположение, что центры инерции тел описывают плоскую орбиту, расположенную в неизменяемой плоскости.

Пусть O_1xy — относительная система координат с началом в центре масс тела M_1 и с осями постоянной ориентации, расположенными в неизменяемой плоскости. Через $O_ix_iy_iz_i$ обозначим оси собственной системы координат тела $M_i (i=1, 2)$, которые направлены по его главным центральным осям инерции.

Предположим, что координатные плоскости $O_ix_iz_i$, являющиеся плоскостями динамической симметрии соответствующих тел M_1 и M_2, во все время движения совпадают с неизменяемой плоскостью орбиты (рис. 1).

Обозначим через A_i, B_i, C_i главные центральные моменты инерции тела M_i, соответствующие осям инерции O_ix_i, O_iy_i, O_iz_i, а через m_1 и m_2 — массы тел M_1 и M_2.

Примем за невозмущенное движение кеплеровское эллиптическое поступательное движение центров инерции тел M_1, M_2 и их равномерное вращательное движение в плоскости орбиты относительно собственных центров масс и опишем их относительное поступательно-вращательное движение каноническими оскулирующими элементами

$$L, G, H_1, H_2, l, g, h_1, h_2, \tag{1}$$

где

$L = m\sqrt{\mu a}$, l — средняя аномалия,

$G = m\sqrt{\mu a(1-l^2)}$, g — угловое расстояние до перицентра орбиты,

H_i — величина вектора кинетического момента вращательного движения тела M_i, h_i — угол вращения тела M_i, измеряемый от направления оси O_1x до оси инерции O_iz_i; a — большая полуось орбиты, e — эксцентриситет орбиты;

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu = f(m_1 + m_2),$$

f — гравитационная постоянная,

$$l = n(t - t_0) + l_0, \quad h_i = n_i(t - t_0) + h_i^0 \quad (i = 1, 2),$$

$n = \sqrt{\mu}/a^{\frac{3}{2}}$ — среднее орбитальное движение, $n_i = H_i/B_i$ — угловая скорость вращательного движения тела $M_i (i=1, 2)$; l_0, h_i^0 — значения соответствующих переменных на момент времени t_0.

Уравнения движения тел M_1, M_2 получаются как частный случай общих уравнений поступательно-вращательного движения n — твердых тел, полученных в работе [3]

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L},$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}, \tag{2}$$

$$\frac{dH_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h_i},\quad \frac{dh_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H_i}\quad (i=1,2),$$

где

$$F=\frac{\mu^2 m^3}{2L^2}-\frac{H_1^2}{2B_1}-\frac{H_2^2}{2B_2}+R, \tag{3}$$

$\mu/r+R$ — силовая функция ньютоновского взаимодействия тел M_1, M_2 с помощью формул невозмущенного движения представляется явной функцией переменных (1) [1, 3].

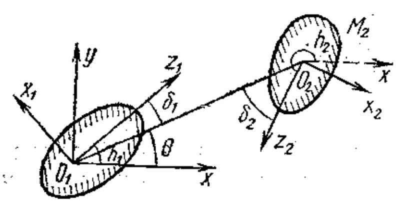

Рис. 1. Основные обозначения

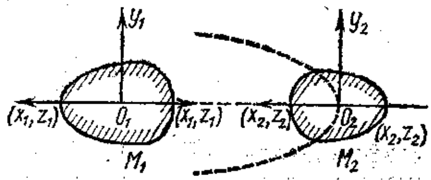

Рис. 2. Взаимные расположения тел в момент прохождения тела M_2 перицентра порождающей орбиты

Сделаем предположение, что эллипсоиды инерции тел мало отличаются от сферы. Тогда характеристическая функция задачи представима в следующем виде, необходимом для применения метода малого параметра Пуанкаре

$$F=F_0+\nu F_1+O(\nu), \tag{4}$$

где

$$F_0=\frac{\mu^2 m^3}{2L^2}-\frac{H_1^2}{2B_1}-\frac{H_2^2}{2B_2} \tag{5}$$

часть гамильтониана, соответствующая невозмущенному движению тел, а νF_1 — часть характеристической функции, которая для широкого класса тел может быть отождествлена с первыми основными членами разложения возмущающей функции R [4]

$$\nu F_1=\frac{f}{2r^3}\{m_1[C_2+B_2-2A_2+3(A_2-C_2)\cos^2\delta_2]+$$
$$+m_2[C_1+B_1-2A_1+3(A_1-C_1)\cos^2\delta_1]\}, \tag{6}$$

где r — расстояние между центрами масс тел M_1 и M_2, δ_i — угол между линией центров O_1O_2 и осью инерции O_iz_i тела M_i (см. рис. 1). При этом в качестве малого параметра может быть выбрана следующая величина:

$$\nu=\max\left\{\frac{|A_i-B_i|}{A_i},\ \frac{|A_i-C_i|}{A_i}\right\}. \tag{7}$$

Используя формулы невозмущенного поступательного и вращательного движения тел [1], получим явное представление для F_1 как функции канонических элементов (1). Будем иметь:

$$\nu F_1 = a^{-3}\left\{(\alpha_1+\alpha_2)\sum_{k=0}^{\infty} X_k^{-3,0}\cos kl + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2}\beta_i\sum_{k=1}^{\infty} X_k^{-3,2}(e)\cos[kl+2(g-h_i)] + X_{-k}^{-3,2}(e)\cos[kl-2(g-h_i)]\right\}, \quad (8)$$

где α_i, β_i — постоянные параметры задачи,

$$\alpha_i = \frac{1}{2} f m_j (2B_i - C_i - A_i), \quad \beta_i = \frac{3}{2} f m_j (A_i - C_i),$$

$$i, j = 1, 2; \quad i \neq j, \quad (9)$$

$$a = \frac{L^2}{m^2\mu}, \quad e = \frac{\sqrt{L^2-G^2}}{L},$$

а коэффициенты $X_k^{-3,0}$, $X_k^{-3,2}$, $X_{-k}^{-3,2}$ являются функциями орбитального эксцентриситета и представляются известными рядами, расположенными по степеням e [1].

Уравнения (2) допускают два первых интеграла: интеграл энергии и интеграл площадей

$$\frac{\mu^2 m^3}{2L^2} - \frac{H_1^2}{2B_1} - \frac{H_2^2}{2B_2} + \nu F_1(L, G, l, g-h_1, g-h_2) + O(\nu) = C_1, \quad (10)$$

$$G + H_1 + H_2 = C_2, \quad (11)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

§ 2. Условия существования периодических решений Пуанкаре. Анализ порождающих решений

При $\nu=0$ решение уравнений (2) соответствует невозмущенному движению, в котором центр инерции тела M_2 описывает относительно центра масс тела M_1 кеплеровскую эллиптическую орбиту. При этом тела M_1 и M_2 вращаются с постоянными угловыми скоростями в плоскости орбиты относительно собственных центров масс.

Очевидно, невозмущенная задача допускает периодические решения, как только период орбитального движения соизмерим с периодами вращательных движений тел.

Исследуем существование периодических решений системы уравнений (2) при малых значениях ν, для чего воспользуемся методом Пуанкаре для канонических систем [5]. При $\nu=0$, интегрируя (2), получаем порождающее решение:

$$L = L_0, \quad G = G_0, \quad H_1 = H_1^0, \quad H_2 = H_2^0, \quad (12)$$

$$l = n^{(0)}t + l_0, \quad g = g_0, \quad h_1 = n_1^{(0)}t + h_1^0, \quad h_2 = n_2^{(0)}t + h_2^0,$$

где

$$n^{(0)} = \frac{\mu^2 m^3}{L_0^3}, \quad n_1^{(0)} = \frac{H_1^0}{B_1}, \quad n_2^{(0)} = \frac{H_2^0}{B_2}, \quad (13)$$

L_0, G_0, H_i^0, l_0, g_0, h_i^0 $(i=1, 2)$ — произвольные постоянные интегрирования.

Это решение будет периодическим с периодом T_0, если будут выполняться условия

$$n^{(0)}T_0 = 2\bar{k}\pi,\ n_1^{(0)}T_0 = 2\bar{k}_1\pi,\ n_2^{(0)}T_0 = 2\bar{k}_2\pi, \tag{14}$$

где $\bar{k}$, $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ — целые числа (показатели соизмеримости).

Обобщая результаты работы [1] на рассматриваемую задачу, согласно теории периодических решений Пуанкаре получим, что уравнения (2) допускают периодические решения периода T_0 при малых значениях параметра ν, если для порождающих решений выполняется следующая группа условий:

$$H(F_0)\big|_{L_0,H_1^0,H_2^0} \neq 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial h_i^0} = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{16}$$

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial G_0} = 0, \tag{17}$$

$$H([F_1])\big|_{h_1^0,h_2^0,G_0} \neq 0, \tag{18}$$

где

$$[F_1] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} F_1(L_0, G_0, l_0 + n^{(0)}t,\ g_0 - h_1^0 - n_1^{(0)}t,\ g_0 - h_2^0 - n_2^{(0)}t)\, at. \tag{19}$$

Условие (15) выполняется всегда, поскольку

$$H(F_0) = -\frac{3\mu^2 m^3}{B_1B_2L_0^4} \neq 0.$$

Прежде чем провести исследование условий (16)—(18), получим явное выражение функции $[F_1]$. Вычисляя интеграл (19), получим

$$\nu [F_1] = a_0^{-3}[(\alpha_1 + \alpha_2) X_0^{-3,0}(e_0) + \beta_1 X_{N_1}^{-3,2}(e_0)\cos 2h_1^0 + \beta_2 X_{N_2}^{-3,2}(e_0)\cos 2h_2^0], \tag{20}$$

где

$$a_0 = \frac{L_0^2}{m^2\mu},\quad e_0 = \frac{\sqrt{L_0^2 - G_0^2}}{L_0},$$

N_1, N_2 — любые целые числа, удовлетворяющие условиям соизмеримости:

$$N_1 n^{(0)} = 2n_1^{(0)},\quad N_2 n^{(0)} = 2n_2^{(0)}. \tag{21}$$

Таким образом, данным методом мы можем исследовать периодические решения, для которых выполняются условия соизмеримости (21).

Запишем условия (16) в явной форме:

$$X_{N_i}^{-3,2}(e_0)\sin 2h_i^0 = 0,\quad (i = 1, 2). \tag{16'}$$

Уравнения (16′) имеют решение

$$h_i^0 = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\quad (l_0 = g_0 = 0), \tag{22}$$

которому можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Начальные значения угловых переменных порождающего решения должны быть такими, чтобы в момент прохождения центра инерции тела M_2 перицентра орбиты одна из его осей инерции O_1x_1 или O_1z_1, а также одна из осей инерции O_2x_2, O_2z_2 тела M_2 были направлены по линии O_1O_2, соединяющей центры масс тел (рис. 2).

Условие (17) удобнее записать относительно новой переменной e_0

$$\frac{1}{e_0}\frac{\partial [F_1]}{\partial l_0}=0. \tag{23}$$

Подставляя $[F_1]$ в (23) и учитывая порождающие значения угловых величин (22), для порождающих значений эксцентриситета e_0 получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{e_0}\left[(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial X_0^{-3.0}}{\partial l_0}+\beta_1\varepsilon_1\frac{\partial X_{N_1}^{-3.2}}{\partial l_0}+\beta_2\varepsilon_2\frac{\partial X_{N_2}^{-3.2}}{\partial l_0}\right]=0, \tag{24}$$

где введены обозначения $\varepsilon_i=\cos 2h_i^0=\pm 1$ $(i=1, 2)$.

Таким образом, в зависимости от показателей соизмеримости N_1, N_2, порождающих значений угловых переменных и от динамического строения компонентов системы из уравнения (24) определяется порождающее значение эксцентриситета орбиты

$$e_0=e_0\left(\delta_1, \delta_2, \delta, \frac{m_2}{m_1}, N_1, N_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2\right), \tag{25}$$

где

$$\delta=\frac{B_1-A_1}{B_2-A_2}, \quad \delta_1=\frac{B_1-C_1}{B_1-A_1}, \quad \delta_2=\frac{B_2-C_2}{B_2-A_2},$$

$$\varepsilon_i=\pm 1, \quad N_i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Прежде чем приступить к изучению зависимости (25), получим явное выражение последнего условия существования периодических решений (18). Будем иметь:

$$H([F_1])\,|_{h_1^0,h_2^0,G_0}=\frac{\partial^2[F_1]}{\partial h_1^{0^2}}\,\frac{\partial^2[F_1]}{\partial h_2^{0^2}}\,\frac{\partial^2[F_1]}{\partial G_0^2}=$$

$$=-16\beta_1\beta_2\varepsilon_1\varepsilon_2X_{N_1}^{-3.2}X_{N_2}^{-3.2}\frac{1}{l_0^2}\left\{(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial^2 X_0^{-3.0}}{\partial l_0^2}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon_1\beta_1\frac{\partial^2 X_{N_1}^{-3.2}}{\partial l_0^2}+\varepsilon_2\beta_2\frac{\partial^2 X_{N_2}^{-3.2}}{\partial l_0^2}\right\}\neq 0. \tag{26}$$

Более детальное исследование уравнения (26) показывает, что условие (18) выполняется для порождающих решений (22), (25).

§ 3. О синхронных поступательно-вращательных движениях тел M_1 и M_2

Особый интерес в данной задаче представляет рассмотрение синхронных движений компонентов, т. е. когда $N_1=N_2=2$. Этот случай представляет важный практический интерес, так как он соответствует движениям некоторых двойных звездных систем [2].

Сделаем предположение, что в перицентре орбиты наименьшие оси инерции тел M_1, M_2 направлены вдоль линии центров O_1O_2, а наибольшие оси инерции тел ортогональны плоскости орбиты. Тогда $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, и уравнение (25) преобразуется к виду:

$$\frac{m_2}{m_1}\delta=\frac{(\delta_1-1)f_2-(1+\delta_2)f_1}{(1+\delta_1)f_1-(\delta_2-1)f_2}, \tag{27}$$

где с точностью до l_0^2 $f_1=1+\frac{5}{2}l_0^2$, $f_2=5-\frac{13}{4}l_0^2$. При сделанных предположениях $B_i\geqslant A_i\geqslant C_i$ и, следовательно, $\delta_1\geqslant 1$, $\delta_2\geqslant 1$ и $\delta\geqslant 0$.

При частных предположениях о динамическом строении компонентов уравнение (27) упрощается. Например, если тела M_1 и M_2 являются подобными однородными эллипсоидами с полуосями $a_2=ka_1$, $b_2=kb_1$, $c_2=kc_1$, где k — коэффициент подобия, тогда $A_2=k^2A_1$, $B_2=k^2B_1$, $C_2=k^2C_1$ и из уравнения (27) вытекает

$$\delta_1=\delta_2=\delta^*=\frac{3}{2}+\frac{63}{32}e_0^2+O(e_0^2). \tag{28}$$

Таким образом, в случае подобных эллипсоидов порождающие значения эксцентриситета орбиты и параметров δ_i определяются тем же уравнением, что и в случае задачи «шар — тело» [1].

Предположим, что тела описывают круговые орбиты (в порождающем решении), тогда, учитывая близость эллипсоидов инерций тел к сферам, из (28) получим

$$q_2=3q_1-2, \tag{29}$$

где $q_1=\frac{a_i}{c_i}$, $q_2=\frac{b_i}{c_i}$ $(i=1, 2)$.

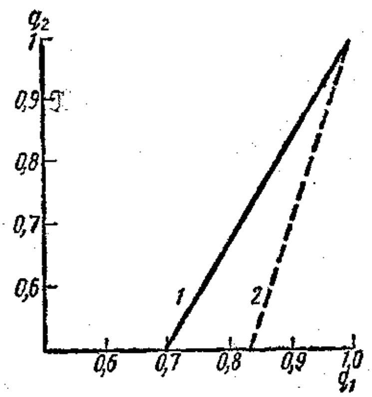

Рис. 3. Зависимость q_2 (q_1): 1 — по теории Дарвина, 2 — по теории поступательно-вращательного движения

Для сравнения приведем аналогичную зависимость, вытекающую из теории двух жидких синхронно-вращающихся тел Дарвина [2],

$$q_2=\frac{5}{3}q_1-\frac{2}{3}. \tag{30}$$

Зависимости (29) и (30) существенно отличаются друг от друга (рис. 3), что обусловленно исходными предпосылками соответствующих задач.

В работе доказано существование восьмипараметрического семейства периодических решений Пуанкаре в задаче о плоском поступательно-вращательном движении твердых тел M_1, M_2. В порождающем решении произвольно выбираются: большая полуось орбиты, начальное положение оси отсчета O_1x, начальное положение линии апсид, начальный момент времени, а также четыре параметра, характеризующие динамическое строение тел δ, δ_1, δ_2, $\frac{m_2}{m_1}$.

Результаты работы указывают на то, что движение двойных звездных систем нельзя моделировать движением двух абсолютно твердых тел. Существенным для таких систем является учет вращательных и приливных эффектов жидких и газообразных компонентов.

При $A_1 = B_1 = C_1$ результаты данной работы совпадают с результатами работы [3], согласно которой синхронно вращающееся твердое тело на слабоэллиптической орбите характеризуется динамическим параметром $\delta^* \simeq 3/2$, что хорошо совпадает с экспериментальными данными о вращательном движении Луны. Поэтому рассматриваемая задача с высокой степенью точности моделирует движение Луны, которая, следовательно, может рассматриваться как твердое тело (в отличие от звездных систем). Эти положения, очевидно, распространяются и на другие синхронные спутники солнечной системы, если механизм образования соответствующего резонансного движения для этих тел такой же, как и для Луны.

Результаты работы позволяют провести детальное численное исследование порождающих решений и построить найденные в работе периодические решения Пуанкаре, которые более точно описывают поступательно-вращательное движение двух твердых тел.

Автор выражает благодарность Д. Я. Мартынову, П. Н. Холопову и М. И. Лаврову за полезные советы и доброе отношение к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баркин Ю. В. «Астрономический журнал», 1976, 53, 1110.
2. Зверев М. С., Кукаркин Б. В., Мартынов Д. Я., Паренаго П. П., Флоря Н. Ф., Цесевич В. П. Переменные звезды, т. 3. М., 1947.
3. Баркин Ю. В. «Астрономический журнал», 1977, 54.
4. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968.
5. Пуанкаре А. Избранные труды, т. 1. М., 1971.

Поступила в редакцию
16.11 1976 г.
Кафедра
небесной механики гравиметрии