

УДК 62—50

М. А. Воронцов
В. И. Шмальгаузен

**О ТРАЕКТОРИЯХ КОРНЕЙ
ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ
РЕГУЛИРОВАНИЯ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ**

Методом траекторий корней исследуются системы регулирования, содержащие распределенный колебательный элемент. Получены основные уравнения траекторий. Исследуется вопрос о редукции основной системы к системе регулирования с сосредоточенными параметрами.

1. Рассмотрим систему автоматического регулирования с распределенными параметрами, структурная схема которой изображена на рис. 1. Объектом управления является линейная распределенная колебательная система с передаточной функцией

$$W_1(x, \xi, P), \quad x, \xi \in D \subset E_n.$$

Через $W_\xi(\xi, P)$ обозначена функция переходного блока, характеризующая распределение управляющего воздействия по системе. Передаточную функцию части системы, состоящей из элементов с сосредоточенными параметрами, представим в виде дробно-рациональной функции

$$KW_2(P) = K \frac{\Psi_m(P)}{\Phi_n(P)},$$

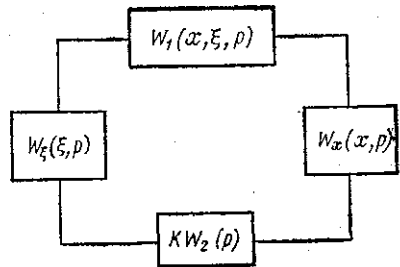


Рис. 1

где $\Psi_m(P)$, $\Phi_n(P)$ — целые полиномы степени m и n , нули которых обозначим через z^j , ($j=1, \dots$) и p^j , ($j=1, \dots$). Переходной блок $W_x(x, p)$ характеризует взаимодействие системы с распределенными параметрами с сосредоточенной частью системы регулирования. Будем предполагать, что функции $W_x(x, p)$ и $W_\xi(\xi, p)$ не имеют особых точек в любой конечной области плотности p .

Рассмотрим весьма широкий класс колебательных систем с распределенными параметрами, передаточная функция которых имеет вид

$$W_1(x, \xi, P) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j(x) \Phi_j(\xi)}{(P - p_j)(P - p_j^*)}, \quad (1)$$

где $\{\Phi_j(x)\}$ — система собственных функций, соответствующая некоторой краевой задаче на границе области D . Относительно комплексно-сопряженных полюсов $p_j = \mu_j + i\omega_j$ будем предполагать, что $p_j \neq 0$ и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{P_j P_j^*} \quad (2)$$

сходится. Ограничение (2) является естественным для большинства колебательных систем, более того, полюсы передаточных функций широкого класса систем (стержней, балок, пластин и т. д.) удовлетворяют более слабому требованию, а именно сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|p_j|}, \quad (3)$$

где через p обозначены модули комплексных чисел p_j . Условие (3) не выполняется для комплексных частот (полюсов), определяемых из решения задачи Штурма—Лиувилля, однако ряд (2) сходится и для такого рода систем.

2. Запишем передаточную функцию замкнутой системы [1].

$$W(x, \xi, p) = W_1(x, \xi, p) + \frac{KW_2(p) \int_D W_x(x, p) W_1(x, \xi, p) dx \int_D W_\xi(v, p) W_1(x, v, p) dv}{1 - KW_2(p) \int_D \int_D W_x(x, p) W_1(x, \xi, p) W_\xi(\xi, p) dx d\xi} \quad (4)$$

Приравняв нулю знаменатель, получим характеристическое уравнение, определяющее полюсы замкнутой системы регулирования

$$KW_2(p) \int_D \int_D W_x(x, p) W_1(x, \xi, p) W_\xi(\xi, p) dx d\xi = 1. \quad (5)$$

Уравнение (5) является трансцендентным и, следовательно, имеет бесконечное, но счетное число корней, расположенных на комплексной плоскости p . Для исследования корней этого уравнения в зависимости от параметра K будем использовать метод траекторий корней.

При непрерывном изменении K из начальных точек p_j, p_j^*, p_j^i , соответствующих значению параметра $K=0$, выходят корни, описывающие на плоскости p непрерывные траектории. Так как все корни могут быть только действительными или комплексно-сопряженными, при графическом изображении траектории корней можно строить только в верхней полуплоскости p . Перейдем в (5) к пределу по $K \rightarrow \pm \infty$. В результате получим следующее уравнение:

$$W_2(p) \int_D \int_D W_x(x, p) W_1(x, \xi, p) W_\xi(\xi, p) dx d\xi = 0. \quad (6)$$

Обозначим корни этого уравнения через

$$z^j, (j = 1, \dots, m), z_j^*, (j = 1, \dots, \infty)$$

и назовем их предельными точками траекторий. Ниже будет показано, что предельные точки траекторий корней во многих случаях могут быть найдены из достаточно простых физических соображений, не прибегая непосредственно к решению уравнения (6). При изменении K от нуля до $\pm \infty$ корни уравнения (5) перемещаются на плоскости p по траекториям, начинающимся в начальных точках и заканчивающихся в предельных точках. Запишем характеристическое уравнение в форме, допускающей простую геометрическую интерпретацию.

Будем предполагать, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z_j z_j^*}$ сходится.

При условиях (3), наложенных на полюсы и нули, функция

$$W_0(p) = \int_D \int_D W_x(x, p) W_1(x, \xi, p) W_\xi(\xi, p) dx d\xi$$

является мероморфной и по теореме Вейерштрасса [2] может быть записана в следующем виде:

$$W_0(p) = W_0(0) e^{cp} \frac{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p}{z_j}\right) \left(1 - \frac{p}{z_j^*}\right) \exp\{p(z_j + z_j^*)/z_j z_j^*\}}{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p}{p_j}\right) \left(1 - \frac{p}{p_j^*}\right) \exp\{p(p_j + p_j^*)/p_j p_j^*\}}, \quad (7)$$

где $c = \frac{d}{dp} \ln W_0(p)$ при $p = 0$. Бесконечные произведения, входящие в (7), сходятся абсолютно и равномерно в любой ограниченной области.

Подставим в характеристическое уравнение координаты любой точки $p = \delta + i\omega$, принадлежащей траекториям корней, и воспользуемся представлением комплексных чисел в полярной системе координат

$$K \equiv \frac{\exp[-\operatorname{Re}(PC)] \prod_{j=1}^n |p - p^j| \prod_{j=1}^{\infty} \{|p - p_j| |p - p_j^*| \exp(x_j)/p_j p_j^*\}}{|W_0(0)| \prod_{j=1}^m |p - z^j| \prod_{j=1}^{\infty} \{|p - z_j| |p - z_j^*| \exp(y_j)/z_j z_j^*\}} \times \\ \times \exp i \left\{ \sum_{j=1}^n \varphi^j + \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j + \varphi_j^* + \bar{\varphi}_j) - \sum_{j=1}^n \psi^j - \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_j + \psi_j^* + \bar{\psi}_j) - \psi_0 \right\}. \quad (8)$$

Здесь $|p - p^j|$, $|p - p_j|$, $|p - p_j^*|$ — длины векторов, проведенных из начальных точек p^j , p_j , p_j^* в точку p , а φ^j , φ_j , φ_j^* — углы, образованные этими векторами с положительным направлением действительной оси. Аналогично $|p - z^j|$, $|p - z_j|$, $|p - z_j^*|$ — длины векторов, проведенных в точку p из предельных точек z^j , z_j , z_j^* , а ψ^j , ψ_j , ψ_j^* — соответствующие им углы. Множители $\exp(x_j)$ и $\exp(y_j)$, где $x_j = \frac{p_j + p_j^*}{p_j p_j^*} \operatorname{Re} p$ и $y_j = \frac{z_j + z_j^*}{z_j z_j^*} \operatorname{Re} p$, обеспечивают сходимость соответствующих бесконечных произведений в (8). Назовем углы

$$\bar{\varphi}_j = \frac{p_j + p_j^*}{p_j p_j^*} \operatorname{Im} p, \quad \bar{\psi}_j = \frac{z_j + z_j^*}{z_j z_j^*} \operatorname{Im} p \quad (9)$$

дополнительными.

В выражении (8) $\psi_0 = \operatorname{Im}(PC) + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} W_0(0)}{\operatorname{Re} W_0(0)}$.

Параметр K является действительным числом, поэтому правая часть (8) должна быть действительной величиной. Это будет иметь место только в том случае, если выполняется следующее фазовое уравнение:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j + \varphi_j^* + \bar{\varphi}_j) - \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_j + \psi_j^* + \bar{\psi}_j) + \sum_{\nu=1}^n \varphi^\nu - \sum_{\nu=1}^m \psi^\nu - \varphi_0 = n\pi, \\ n = 0, \pm 1, \dots, \infty. \quad (10)$$

Таким образом, чтобы определить, принадлежит ли некоторая точка p траекториям корней, необходимо провести в эту точку векторы из основных точек $p_j, p_j^*, z_j, z_j^*, p^j, z^j$, определить соответствующие им углы, а также дополнительные углы $\bar{\varphi}_j$ и $\bar{\psi}_j$ и просуммировать их в соответствии с (10). Если получившееся число кратно π , то заданная точка p принадлежит траекториям корней. Уравнение (10) аналогично известному фазовому уравнению для линейных автоматических систем с сосредоточенными параметрами [3]. Однако по сравнению с этим фазовым уравнением в (10) входят дополнительные углы $\bar{\varphi}_j$ и $\bar{\psi}_j$, наличие которых обеспечивает сходимость рядов в (10).

Поясним сказанное примером. Рассмотрим колебательную систему с эквидистантными комплексными частотами $p_j = \mu_j + i\omega_j$, $\omega_j = -\omega_{0j}$, $\mu_j = \beta_j$. Такой характер распределения комплексных частот имеет, например, жестко закрепленный однородный стержень, совершающий продольные колебания. Диссипация энергии стержня учитывается введением комплексной упругой постоянной [4]. Пусть некоторая точка $p = \delta + i\omega$ принадлежит траектории корней. Запишем аналитическое выражение для ряда $I = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j + \varphi_j^* + \bar{\varphi}_j)$. Из геометрического рассмотрения несложно получить следующие соотношения:

$$\operatorname{tg}(\varphi_j + \varphi_j^*) = -2\omega \frac{(\beta_j - \delta)}{(\beta_j - \delta)^2 + \omega_0^2 j^2 - \omega^2}, \quad \bar{\varphi}_j = \frac{2\omega\beta}{(\beta^2 + \omega_0^2)j}.$$

Так как $\lim_{j \rightarrow \infty} [(\varphi_j + \varphi_j^* + \bar{\varphi}_j)/(1/j^2)] = C < \infty$, то по теореме сравнения рядов [5] ряд I сходится. Если же по аналогии с методом траекторий корней для систем с сосредоточенными параметрами не учитывать дополнительные углы, то ряд $I_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j + \varphi_j^*)$ расходится. Действительно,

сравнивая этот ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$, получим $\lim_{j \rightarrow \infty} (\varphi_j + \varphi_j^*)j = -\frac{2\omega\beta}{\beta^2 + \omega_0^2} > 0$, т. е. I_1 расходится.

Во многих практически важных случаях дополнительные углы $\bar{\varphi}_j$ и $\bar{\psi}_j$ тем не менее равны нулю. В частности, это имеет место для систем, у которых начальные и предельные точки траекторий корней таковы, что сходится ряд (3). Действительно, в этом случае согласно [2] в выражении (7) для мероморфной функции $W_0(p)$ следует опустить экспоненциальные множители и соответственно во всех последующих выражениях необходимо положить углы φ_j и ψ_j равными нулю.

3. Приведем без доказательств основные свойства траекторий корней и сравним их с соответствующими свойствами траекторий корней систем с сосредоточенными параметрами.

а) Траектории симметричны относительно действительной оси.

б) Любую группу корней при фиксированном значении параметра K можно принять за начальные точки траекторий корней. Предельные точки при этом не изменятся.

в) Любая точка действительной оси принадлежит траекториям корней.

г) В тех случаях, когда дополнительные углы равны нулю, имеет место также теорема о смещении мнимой оси, справедливая для систем с сосредоточенными параметрами [3].

Перечисленные свойства совпадают с аналогичными свойствами траекторий корней систем регулирования с сосредоточенными параметрами. Свойство в) является следствием симметрии траекторий относительно действительной оси и однозначности функции $W_0(p)$. В тех случаях, когда распределенный элемент описывается неоднозначной передаточной функцией, траекториям корней принадлежит не вся действительная ось, а только положительная ее часть и дискретные точки отрицательной полуоси [6]. Запишем фазовое уравнение для угла α_k выхода траекторий из простой начальной точки p_k (рис. 2)

$$\alpha_k = n\pi - \frac{\pi}{2} - \sum_{j \neq k}^{\infty} (\varphi_j + \varphi_j^* + \bar{\varphi}_j) + \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_j + \psi_j^* + \bar{\psi}_j) - \sum_{v=1}^{N_2} \varphi^v + \sum_{v=1}^m \psi^v + \psi_0 - \bar{\varphi}_k. \quad (11)$$

Аналогично можно записать уравнение для углов входа в предельные точки траекторий корней. Зная координаты основных точек на плоскости p , можно просуммировать соответствующие ряды и найти углы входа и выхода траекторий.

4. Остановимся на другом важном для приложений вопросе. В инженерной практике анализ систем регулирования с распределенными параметрами обычно заменяется исследованием некоторой системы с сосредоточенными параметрами. В терминах передаточных функций эта замена исходной системы приближенной эквивалентна отбрасыванию в (1) членов ряда с номерами $j > N$, где N — некоторое число, выбираемое из тех или иных физических соображений с большой степенью произвола. Тем самым рассматривается поведение на комплексной плоскости только N корней. Оценкой близости аппроксимирующей системы к системе с распределенными параметрами часто служит само число N . Полученная приближенная система регулирования уже анализируется с помощью известных методов автоматического регулирования [3]. Для математической корректности такой редукции необходимо, чтобы в пределе при $N \rightarrow \infty$ приближенная система переходила в исходную. Однако из предыдущего рассмотрения следует, что такой предельный переход в некоторых случаях может не приводить к исходной системе (игнорирование дополнительных углов φ_j и ψ_j в рассмотренном примере повлекло за собой расходимость соответствующих рядов в фазовом уравнении). Кроме того, при таком способе перехода к приближенной системе не ясно, сколько и какие именно члены в передаточной функции (1) следует сохранить.

Во многих практически важных системах распределение начальных и предельных точек таково, что соответствующие ряды в (11) сходятся достаточно быстро. Направление выхода траектории из начальной точки p_k в этом случае можно оценивать ограничиваясь некоторым числом N_k основных точек.

Перенумеруем особые точки в порядке убывания соответствующих им углов и будем учитывать только первые N_k из них.

Тогда передаточная функция будет содержать только N_k членов. Для определения комплексных частот замкнутой системы получим вместо исходного трансцендентного уравнения (5) систему независимых алгебраических уравнений

$$KW_2(p) \sum_{j=1}^{N_k} \frac{q_j(p)}{(p-p_j)(p-p_j^*)} = 1, \quad k=1, \dots, \infty, \quad (12)$$

где

$$q_j(p) = \iint_{D^2} W_x(x, p) \Phi_j(x) \Phi_j(\xi) W_\xi(\xi, p) dx d\xi.$$

Каждое уравнение системы служит для определения только одного корня с номером k . Число членов ряда N_k для каждого корня,

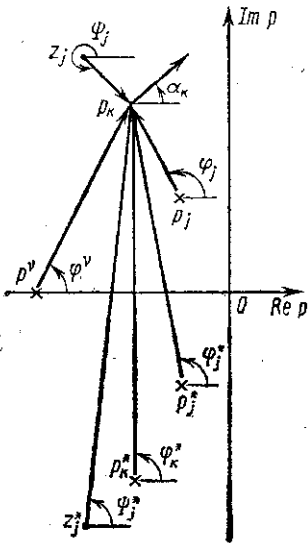


Рис. 2

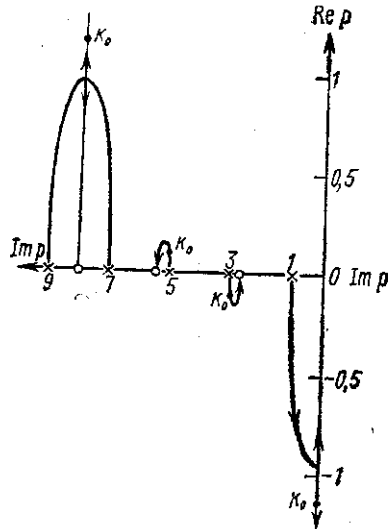


Рис. 3

конечно, может быть разным, однако, в силу симметрии в расположении полюсов или из соображений простоты, числа N_k можно выбирать равными. Если в (12) все N_k равны между собой, то такую систему будем называть приближением N порядка к системе регулирования с распределенными параметрами. В качестве оценки такой аппроксимации введем величину ε , определяемую следующим образом. В (11) при суммировании по j ограничимся только N членами и обозначим через α_k^N получившийся при этом угол выхода корня из начальной точки p_k .

Пусть наибольший неучтенный угол равен χ_k , тогда

$$\varepsilon = \max_k |\chi_k / \alpha_k^N|, \quad k=1, \dots, \infty. \quad (13)$$

Задаваясь определенным ε и измеряя соответствующие углы, легко определить необходимый порядок аппроксимации и записать соответствующую систему уравнений (12). Траектории корней полу-

ченной системы можно строить по известной методике, учитывая, однако, если это необходимо, дополнительные углы.

Пример. Рассмотрим систему регулирования, в состав которой входит однородный стержень длины $L=1$, совершающий продольные колебания. Стержень охвачен обратной связью. Передаточная функция цепи обратной связи — $KW_2(p)$. Будем считать правый конец стержня жестко закрепленным, а другой свободным.

Пусть функция состояния системы измерима в некоторой точке $x=x_H$, а управляющее воздействие прикладывается в точке $x=x_H$. Тогда $W_x(x, p) = \delta(x-x_H)$, $W_\xi(\xi, p) = \delta(\xi-x_H)$. Передаточная функция стержня имеет вид

$$W_1(x, \xi, p) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j(x) \Phi_j(\xi)}{p^2 + \omega_j^2}, \quad (14)$$

где $\Phi_j(x) = \sqrt{2} \sin \pi(2j-1)x/2$, $\omega_j = 2j-1$, или, суммируя ряд,

$$W_1(x, \xi, p) = \begin{cases} \frac{\pi}{2p} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} px \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} p(1-\xi) / \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} p, & x \leq \xi \\ \frac{\pi}{2p} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} p(1-x) \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} p\xi / \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} p, & x \geq \xi. \end{cases} \quad (15)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$KW_2(p) \frac{\pi \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} p(1-x_H) \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} px_H}{2p \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} p} = 1, \quad x_H < x_H. \quad (16)$$

Начальные точки траекторий корней $p_j = i(2j-1)$, а предельные точки находятся из следующего уравнения:

$$W_1(x_H, x_H, p) = 0, \quad W_2(p) = 0. \quad (17)$$

Отсюда с учетом (16) $z_j^H = i2j/x_H$, $z_j^H = i(2j-1)/(1-x_H)$. Таким образом, предельные точки совпадают с комплексными частотами двух систем: стержня длиной $L=x_H$ с закрепленными концами и стержня длины $L=1-x_H$, левый конец которого закреплен, а правый по-прежнему свободен. Этот результат легко понять, если трактовать условия (17) как дополнительные граничные условия для передаточной функции в точках x_H и x_H (жесткое закрепление). Поэтому во многих задачах, не решая уравнения (16), можно определить предельные частоты

из физических условий. Ряды $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|p_j|^q}$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|z_j^H|^q} + \frac{1}{|z_j^H|^q} \right\}$ сходятся при $q > 1$ и, значит, в соответствии с (7)

$$W_0(p) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x_H \prod_{j=1}^{\infty} \left[\left[1 + \frac{p^2(1-x_H)}{(2j-1)^2} \right] \left[1 + \frac{p^2 x_H}{4j^2} \right] / \left[1 + p^2/(2j-1)^2 \right] \right].$$

Направление выхода j корня определяется углами $\Phi_j, \Phi_j^*, \Psi_j, \Psi_j^*, \bar{\Phi}_j, \bar{\Psi}_j, \Phi^j, \Psi^j$, которые согласно (9) равны: $\bar{\Phi}_j = \bar{\Psi}_j = 0$, $\Phi_j = \Psi_j^* = \pi/2$. Фазовое уравнение принимает вид $\sum_{j=1}^n \Phi_j^j - \sum_{j=1}^m \Psi_j^j = n\pi$,

т. е. каждый корень выходит из своей начальной точки так, как если бы не было множества других нулей и полюсов. Поэтому при небольших значениях K для анализа траекторий корней целесообразно ограничиться приближением первого порядка, т. е. считать отдельные корни независимыми. На рис. 3 приведены траектории корней рассматриваемой системы ($W_2(p) = p$, $x_n = 1$, $x_{n-1} = 0,75$), полученные из численного решения уравнения (16). На графике отмечены значения параметра K_0 , такие, что при $K \leq K_0$ решение системы первого порядка отличается от точного решения не более чем на 10%. Для того чтобы получить такую же точность при $K > K_0$, необходимо, очевидно, взять приближенную систему более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А. Г. «Автоматика и телемеханика», 1975, № 5.
2. Маркушевич А. Н. Теория аналитических функций, т. 2. М., 1968.
3. Вендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., 1964.
4. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М., 1973.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., 1969.
6. Ахматова О. Д., Вендриков Г. А. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1971, 12, № 2.

Поступила в редакцию
21.12 1976 г.
Кафедра
общей физики для мехмата