УДК 53:51

Л. С. Кузьменков
П. А. Поляков
П. Б. Подосёнов

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ СРЕДНИХ В РАВНОВЕСНОЙ СИСТЕМЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Развит приближенный метод вычисления средних с помощью релятивистской функции распределения Оорта для гравитирующих частиц с цилиндрической симметрией. Найдены оценки точности метода. Получена релятивистская формула Оорта для зависимости средней скорости частиц от расстояния до оси вращения, совпадающая для малых скоростей $v \ll c$ с результатом нерелятивистской статистики. Вычислена релятивистская плотность числа частиц, компонента 4-вектора средней скорости и тензора энергии-импульса. Для малых скоростей $v \ll c$ и потенциалов $\Phi \ll c^2$ релятивистская плотность числа частиц совпадает с известной барометрической формулой. Используя феноменологическую теорию Эккарта, найдены уравнения состояния, которые в нерелятивистском пределе совпадают с уравнениями состояния идеального газа.

Функция распределения релятивистских частиц в гравитационном поле с цилиндрической симметрией согласно работе [1] имеет вид

$$f = A \exp\left\{\frac{1}{\theta}\left[cp_0 + \omega p_4 + \frac{\varkappa c}{2}\frac{p_\varphi^2}{p_0}\right]\right\}, \tag{1}$$

где A, θ, ω, $\varkappa$ — постоянные, p_0, p_φ — компоненты 4-вектора импульса, cp_0 — энергия частицы.

Значения микроскопических параметров статистических систем сравнительно просто могут быть вычислены на основании функции (1) лишь при $\varkappa=0$, т. е. для однородных систем. Средние значения при $\varkappa \neq 0$ не выражаются явно через известные специальные функции и трудно поддаются физическому анализу. Однако можно развить приближенный метод вычисления средних, используя идеи метода Лапласа [2].

Пусть p_ω есть наиболее вероятное значение компонента импульса p_φ. Наиболее вероятные значения компонентов p_r и p_z равны нулю и совпадают с их средними значениями. Учитывая, что для реальных равновесных физических систем наиболее вероятные значения импульсов p_r, p_φ, p_z близки к их средним значениям, в качестве достаточно хорошей аппроксимации выражения (1) можно принять функцию

$$f_0 = A_0 \exp\left\{\frac{1}{\theta}\left[cp_0 + \Omega p_\varphi\right]\right\}, \tag{2}$$

где

$$A_0 = A \exp\left\{\frac{\varkappa}{\theta}\psi(p_\omega)\right\}, \quad \psi(p_k) = \frac{c}{2}\frac{p_\varphi^2}{p_0}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\Omega = \omega + \varkappa\frac{\partial\psi(p_\omega)}{\partial p_\varphi}, \quad p_1 = p_r, \quad p_2 = p_\varphi, \quad p_3 = p_z.$$

Оценим ошибку, допускаемую при вычислении с помощью функции (2) плотности числа частиц $n(x)$, средней локальной скорости частиц $v^{\varphi}(x)$, тензора энергии-импульса $T^{\alpha}_{\beta}(x)$. Для этого разложим функция $\psi(p_k)$ в ряд Тейлора относительно точки $p_k=\{0, p_\omega, 0\}$:

$$\psi(p_k)=\sum_{n=0}^{2}\psi(p_\omega)\frac{(p_\varphi-p_\omega)^n}{n!}+\sum_{n+m+k=3}^{\infty}Q_{n,m,k}(p_1,\ p_2-p_\omega,\ p_3), \qquad (3)$$

где $Q_{n,m,k}(p_1,\ p_2-p_\omega,\ p_3)$ — полином относительно p_1, p_2-p_ω, p_3 степени $n+m+k$. Учитывая выражение (3), функцию (1) можно представить в виде ряда

$$f=f_0\left[1+\frac{\varkappa}{\theta}\frac{\partial^2\psi(p_\omega)}{\partial p_\varphi^2}\frac{(p_\varphi-p_\omega)^2}{2}+\sum_{n+m+k=3}^{\infty}\tilde{\psi}_{n,m,k}(p_1,\ p_2-p_\omega,\ p_3)\right], \qquad (4)$$

где $\tilde{\psi}_{n,m,k}$ — полином степени $n+m+k$.

Используя формулу (4), имеем

$$n(x)=\int f(x,\ p_k)\frac{d^3p_k}{\sqrt{-g}}=n_0(x)\left[1+\frac{\varkappa}{2\theta}\frac{\partial^2\psi(p_\omega)}{\partial p_\varphi^2}\langle(p_\varphi-p_\omega)^2\rangle_0+\right.$$

$$\left.+\sum_{n+m+k=3}^{\infty}\langle\tilde{\psi}_{n,m,k}(p_1,\ p_2-p_\omega,\ p_3)\rangle_0\right], \qquad (5)$$

$$v^{\varphi}(x)=\langle V^{\varphi}\rangle=\left(v_0^{\varphi}+\frac{\varkappa}{2\theta}\frac{\partial^2\psi(p_\omega)}{\partial p_\varphi^2}\langle V^{\varphi}(p_\varphi-p_\omega)^2\rangle_0+\right.$$

$$\left.+\sum_{n+m+k=3}^{\infty}\langle V^{\varphi}\tilde{\psi}_{n,m,k}(p_1,\ p_2-p_\omega,\ p_3)\rangle_0\right)\cdot$$

$$\left(1+\frac{\chi}{2\theta}\frac{\partial^2\psi(p_\omega)}{\partial p_\varphi^2}\langle(p_\varphi-p_\omega)\rangle_0+\sum_{n+m+k=3}^{\infty}\langle\tilde{\psi}_{n,m,k}(p_1,\ p_2-p_\omega,\ p_3)\rangle_0\right), \qquad (6)$$

$$T^{\alpha}_{\beta}=n(x)\langle V^{\alpha}p_\beta\rangle=T^{\alpha}_{(0)\beta}+n_0(x)\left[\frac{\varkappa}{2\theta}\frac{\partial^2\psi(p_\omega)}{\partial p_\varphi^2}\langle V^{\alpha}p_\beta(p_\varphi-p_\omega)^2\rangle_0+\right.$$

$$\left.+\sum_{n+m+k=3}^{\infty}\langle V^{\alpha}p_\beta\tilde{\psi}_{n,m,k}(p_1,\ p_2-p_\omega,\ p_3)\rangle_0\right]. \qquad (7)$$

Здесь $\langle\ldots\rangle=\int(\ldots)fd^3p_k/\int fd^3p_k$, $|-g|$ — детерминант метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Величины с индексом ноль относятся к распределению (2).

Из выражений (5)—(7) видно, что средние значения, вычисленные с помощью функции (2), тем точнее, чем меньше различные моменты функции (2), ее производные в точке $p_k=\{0, p_\omega, 0\}$ и параметр $\varkappa/\theta$.

Можно по порядку величины оценить точность вычисления средних. Полагая, что первые члены в выражениях (5)—(7) значительно больше последующих, имеем

$$|n(x)-n_0(x)|\cong\left|n_0(x)\frac{\varkappa}{2\Theta}\frac{\partial^2\psi(p_\omega)}{\partial p_\varphi^2}\langle(p_\varphi-p_\omega)\rangle_0\right|, \tag{8}$$

$$|v^\varphi(x)-v_0^\varphi(x)|\cong\left|\frac{\varkappa}{\Theta}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(p_\omega)}{\partial p_\varphi^2}\left(\langle V^\varphi(p_\varphi-p_\omega)\rangle_0-\langle(p_\varphi-p_\omega)^2\rangle_0\right)\right|, \tag{9}$$

$$|T_\beta^\alpha-T_{(0)\beta}^\alpha|\cong\left|n_0(x)\frac{\varkappa}{2\theta}\frac{\partial^2\psi(p_\omega)}{\partial p_\varphi^2}\langle V^\alpha p_\beta(p_\varphi-p_\omega)\rangle_0\right|. \tag{10}$$

Из (8)—(10) видно, что точность метода тем выше, чем меньше параметр неоднородности $\varkappa$ или чем меньше отношение азимутальной дисперсии к температуре Θ, а также чем меньше вторая производная функции ψ. В нерелятивистском пределе $\partial^2\psi/\partial p_\varphi^2=2$, а при больших p_ω эта функция близка к нулю.

В дальнейшем все средние значения вычисляются приближенно, поэтому индекс нуль для простоты опускается.

Средняя и наиболее вероятная скорости. Для наиболее вероятной скорости $V_{\text{н.в.}}^\varphi$ из (1) нетрудно получить уравнение

$$V_{\text{н.в.}}^\varphi=\Omega(V_{\text{н.в.}}^\varphi). \tag{11}$$

Средняя скорость, вычисленная с помощью (2), равна

$$\langle V^\varphi\rangle=\Omega(V_{\text{н.в.}}^\varphi). \tag{12}$$

Из соотношений (11) и (12) следует, что средняя скорость вращения частиц, вычисленная с помощью приближенной функции распределения (2), совпадает с наиболее вероятной скоростью, определяемой точной функцией (1).

Приведем явный вид уравнения для определения среднего значения скорости

$$V_\omega^3-\frac{2\Lambda^4}{\varkappa c^2r^2}\left(1+\frac{\varkappa c^2r^2}{\Lambda^2}\right)V_\omega+\frac{2\Lambda^4\omega}{\varkappa c^2r}=0, \tag{13}$$

где $V_\omega=V_{\text{н.в.}}^\varphi r$.

При выводе уравнений (11)—(13) использовалась метрика, полученная в работе [1]

$$g_{00}=\Lambda^4/c^4,\quad g_{0k}=0,\quad g_{km}=-\delta_{km}\frac{\Lambda^2}{c^2};\quad (k,\ m\neq2),\quad g_{22}=-\frac{\Lambda^2}{c^2}r^2,$$

где δ_{km} — символ Кронекера, $\Lambda^2=c^2+\Phi(x)$, а $\Phi(x)$ — гравитационный потенциал. Отметим, что кубическое уравнение (13) может иметь 3 действительных корня и, следовательно, функция (1) должна иметь 3 экстремума. В случае, когда хотя бы один корень уравнения (13) удовлетворяет неравенству $V_\omega\ll\Lambda$, нетрудно убедиться, что два других решения уравнения (13) больше величины Λ, что приводит к мнимой энергии. Следовательно, при $V_\omega\ll\Lambda$ имеется только одно действительное значение скорости V_ω.

Перепишем уравнение (13) в виде

$$V_\omega=\frac{\omega r}{1+\varkappa c^2r^2/\Lambda^2}+\frac{\varkappa c^4r^2}{2\Lambda^4}\frac{V_\omega}{1+\varkappa c^2r^2/\Lambda^2}\frac{V_\omega^2}{c^2}. \tag{14}$$

Полагая, что $V_\omega^2/c^2\ll1$, видим, что вторым слагаемым в правой части выражения (14) можно пренебречь. Тогда решение уравнения (14) имеет вид

$$\widetilde{V}_\omega = \frac{\omega r}{1 + \varkappa c^2 r^2/\Lambda^2}. \qquad (15)$$

Найденная формула для зависимости средней скорости от расстояния до оси вращения совпадает с результатом работы [1]. Для слабых полей $\Phi(x)/c^2 \ll 1$ формула (15) совпадает с известной формулой Оорта [3].

Из выражения (14) нетрудно также получить релятивистские поправки к формуле (15)

$$V_\omega = \widetilde{V}_\omega + \frac{\varkappa c^4 r^2 \widetilde{V}_\omega}{2\Lambda^4 (1 + \varkappa c^2 r^2/\Lambda^2)} \frac{\widetilde{V}_\omega^2}{c^2} + \ldots$$

Плотность числа частиц определяется интегралом.

$$n(x) = \int\limits_{(\infty)} A_0 \exp\left\{\frac{1}{\theta}[cp_0 + \Omega p_\varphi]\right\} \frac{d^3 p_k}{\sqrt{-g}}.$$

Вычисления приводят к результату

$$n(x) = \frac{4\pi A c^5 \theta m^2}{\Lambda^4 \left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{\Lambda^2}\right)} K_2\left(\frac{m\Lambda^2}{\theta}\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{\Lambda^2}}\right), \qquad (16)$$

где K_2 — функция Макдональда. Для твердотельного вращения следует положить в (16) $\varkappa = 0$, $\Omega = \omega = \mathrm{const}$.

Используя асимптотические формулы функции K_2 для больших и малых значений аргументов [4], имеем.

а. При малых температурах и скоростях, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{m\Lambda^2}{\theta}\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{\Lambda^2}} \gg 1,$$

получаем

$$n(x) \cong \frac{4\pi A c^5 \theta m^2}{\Lambda^4 (1 - \Omega^2 r^2/\Lambda^2)} \left(\frac{\pi\theta}{2m\Lambda^2 \sqrt{1 - \Omega^2 r^2/\Lambda^2}}\right)^{1/2} \exp \times$$
$$\times \left\{-\frac{m\Lambda^2}{\theta}\sqrt{1 - \Omega^2 r^2/\Lambda^2}\right\}. \qquad (17)$$

б. Для больших температур или ультрарелятивистских значений средней скорости, т. е. при

$$\frac{m\Lambda^2}{\theta}\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{\Lambda^2}} \ll 1,$$

находим

$$n(x) \cong \frac{8\pi A \theta^3 c^5}{\Lambda^8 (1 - \Omega^2 r^2/\Lambda^2)} \qquad (18)$$

Отметим, что для нерелятивистских средних скоростей $\Omega r \ll \Lambda$ выражение (17) можно преобразовать:

$$n(x) = \frac{c^5}{\Lambda^5} A' \exp\left\{-\frac{m}{\theta}(\Phi(x) - U_u)\right\},$$

где

$$A' = (2\pi\theta m)^{3/2} \exp\{-mc^2/\theta\} A, \quad U_u = \frac{\Omega^2 r^2}{2}. \qquad (19)$$

Для случая слабого гравитационного поля $\Phi(x)/c^2 \ll 1$ формула (19) переходит в известную барометрическую формулу

$$n(x) = A' \exp\left\{-\frac{m}{\theta}(\Phi(x) - U_u)\right\}.$$

4-вектор средней скорости. Согласно [5] 4-вектор средней скорости равен

$$\tau^\alpha = v^\alpha / \sqrt{g_{\alpha\beta} v^\alpha(x) v^\beta(x)/c^2}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \tag{20}$$

где $v^\alpha = \left\langle c \frac{p^\alpha}{p^0} \right\rangle$.

Вычисляя средние $c\left\langle \frac{p^\alpha}{p^0} \right\rangle$ и подставляя их значения в (20), получим

$$\tau^0 = \frac{c^2}{\Lambda^2} \Big/ \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{\Lambda^2}}, \quad \tau^r = \tau^z = 0, \quad \tau^\varphi = \frac{c\Omega}{\Lambda^2} \Big/ \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{\Lambda^2}}. \tag{21}$$

Тензор энергии-импульса и уравнения состояния. Компоненты тензора энергии-импульса частиц определяются по формуле

$$T^\alpha_\beta = -n(x) \int V^\alpha p_\beta f \frac{d^3 p_k}{\sqrt{-g}} = n(x) \langle V^\alpha p_\beta \rangle. \tag{22}$$

Вычисление (22) приводит к выражениям:

для плотности энергии частиц $n(x)\langle -cp_0\rangle$

$$T^0_0 = -n(x)\langle cp_0 \rangle = n\theta \left[3 + \frac{\Omega^2 r^2}{\Lambda^2} + \alpha K_1(\alpha)/K_2(\alpha)\right] \tau^0 \tau_0, \tag{23}$$

для плотности импульса $n(x)\langle p_\varphi \rangle$

$$cn(x)\langle p_\varphi \rangle = T^0_\varphi = n\theta[4 + \alpha K_1(\alpha)/K_2(\alpha)] \tau^0 \tau_\varphi, \tag{24}$$

для среднего значения плотности потока импульса $n(x)\langle p_\varphi V^\varphi \rangle$

$$n(x)\langle p_\varphi v^\varphi \rangle = T^\varphi_\varphi = n\theta \left[3 + \frac{\Lambda^2}{\Omega^2 r^2} + \alpha K_1(\alpha)/K_2(\alpha)\right] \tau^\varphi \tau_\varphi, \tag{25}$$

и аналогично

$$T^r_r = T^z_z = -n\theta, \quad T^\varphi_0 = -\frac{\Lambda^2}{c^2 r^2} T^0_\varphi, \tag{26}$$

где

$$\alpha = \frac{m\Lambda^2}{\theta} \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{\Lambda^2}}.$$

Все остальные компоненты тензора энергии-импульса T^α_β равны нулю.

Сравнивая (23)—(26) с феноменологической теорией Эккарта [6], в которой

$$T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + p)\tau^\alpha \tau^\beta - p g^{\alpha\beta},$$

находим плотность энергии в сопутствующей системе отсчета

$$\varepsilon = n\theta[3 + \alpha K_1(\alpha)/K_2(\alpha)] \tag{27}$$

и уравнение состояния

$$P = n\Theta. \tag{28}$$

Для малых средних скоростей и низких температур формулы (27)—(28) переходят в обычные уравнения состояния идеального газа гравитирующих частиц

$$\varepsilon = \frac{3}{2} n\Theta + n(m\Phi(x) - mU_u(x)) + nmc^2,$$

$$P = n\Theta.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьменков Л. С. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1975, 15, № 2.
2. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М., 1970.
3. Огородников К. Ф. Динамика звездных систем. М., 1958.
4. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М., 1968.
5. Кузьменков Л. С. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1973, 13, № 4.
6. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М., 1971.

Поступила в редакцию
26.2 1977 г.
Кафедра
теоретической физики