$$H_{0z} = H_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{K_1}{2M}\right)^2 \frac{1}{H_\theta} \sin^2 2\theta\,(3\sin^2\theta - 2)^2;$$

$$N_{11} = \frac{9}{8}\,\omega_a \sin 2\theta\,(2 - 3\sin^2\theta); \qquad N_{1*1*} = -\frac{3}{8}\,\omega_a \sin 2\theta\,(2 + 3\sin^2\theta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пильщиков А. И., Захаров Г. Ф. Материалы VII Всесоюзного семинара по гиромагнитной электронике. Ашхабад, 1973.
2. Яковлев Ю. М., Бурдун Ю. Н. «Физика твердого тела», 1974, 16, 466.
3. Пильщиков А. И., Захаров Г. Ф. Деп. в ВИНИТИ № 615—74, 1974.
4. Пильщиков А. И., Захаров Г. Ф. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1974, 15, № 6.
5. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М., 1973.
6. Захаров Г. Ф. Канд. дис. МГУ, 1975.

Поступила в редакцию
15.12 1976 г.
Кафедра
радиотехники СВЧ

УДК 577.91:343

Г. Н. Медведев
Б. И. Моргунов

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Постановка задачи. Рассматривается система интегродифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(x, \tilde{x}, \psi, \tilde{\psi}, \int_0^t f(x(s), \tilde{x}(s), \psi(s), \tilde{\psi}(s), s, t)\,ds\right),$$

$$\dot{\psi} = \omega(x) + \varepsilon\Psi\left(x, \tilde{x}, \psi, \tilde{\psi}, \int_0^t g(x(s), \tilde{x}(s), \psi(s), \tilde{\psi}(s), s, t)\,ds\right), \qquad (1)$$

где x, X и ψ, Ψ — n- и m-мерные векторные функции, $\tilde{x} \equiv x(t-\Delta)$, $\tilde{\psi} \equiv \psi(t-\Delta)$, $\tilde{x}(s) \equiv x(s-\Delta)$, $\tilde{\psi}(s) \equiv \psi(s-\Delta)$, $\Delta > 0$ — запаздывание — положительная постоянная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Функции X и Ψ периодичны по переменным ψ и $\tilde{\psi}$ с периодом 2π. Некоторые системы интегродифференциальных уравнений изучались в [1, 2].

В настоящей статье исследованы резонансные явления в системах вида (1). В статье [3] резонансные явления в системах вида (1) были исследованы на асимптотически большом, но конечном промежутке времени. В настоящей работе проводится исследование устойчивости стационарных резонансных режимов на бесконечном промежутке времени. Для этого к системе (1) применяется специализированная схема усреднения [4], позволяющая получить усредненную систему и вычислить стационарные резонансные значения переменных с большей степенью точности, чем это было сделано в работе [3] для конечного промежутка времени.

Основные результаты. Резонанс в системе (1) определим следующим образом:

$$N\omega(x_0) = 0, \quad \omega(x_0) \neq 0,$$

где N — целочисленный вектор.

Введем согласно [4] новые переменные (фазовые расстройки) $\varphi_j = N_j \psi_j$ $(j=1, \ldots, r;\ r \leqslant m)$, N_j — базисная система для векторов N. В новых переменных система (1) примет вид

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(x, \widetilde{x}, \varphi, \widetilde{\varphi}, \beta, \widetilde{\beta}, \int_0^t f(x(s), \widetilde{x}(s), \varphi(s), \widetilde{\varphi}(s), \beta(s), \widetilde{\beta}(s), s, t)\, ds\right),$$

$$\dot{\varphi} = \lambda(x) + \varepsilon\Phi\left(x, \widetilde{x}, \varphi, \widetilde{\varphi}, \beta, \widetilde{\beta}, \int_0^t g(x(s), \widetilde{x}(s), \varphi(s), \widetilde{\varphi}(s), \beta(s), \widetilde{\beta}(s), s, t)\, ds\right), \qquad (2)$$

$$\dot{\beta} = \Omega(x) + \varepsilon B\left(x, \widetilde{x}, \varphi, \widetilde{\varphi}, \beta, \widetilde{\beta}, \int_0^t g(x(s), \widetilde{x}(s), \varphi(s), \widetilde{\varphi}(s), \beta(s), \widetilde{\beta}(s), s, t)\, ds\right),$$

где $\lambda_j(x) = N_j\omega(x)$ $(j=1, \ldots, r)$, $\lambda(x_0)=0$, а частоты $\Omega(x_0)$ уже рационально несоизмеримы, т. е. соотношение $K\Omega(x_0)=0$ не выполняется при векторе K, отличном от нуля.

Под средним значением функции

$$F\left(x, x, \varphi, \varphi, \beta, \widetilde{\beta}, \int_0^t f(x, x, \varphi, \varphi, \Omega(x)s, \Omega(x)(s-\Delta), s, t)\, ds\right)$$

будем понимать функцию

$$\frac{1}{(2\pi)^{2(m-r)}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_{2(m-r)} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F\left(x, x, \varphi, \varphi, \int_0^t f(x, x, \varphi, \varphi, \Omega(x)s, \Omega(x)(s-\Delta), s, t)\, ds\right) \times$$

$$\times\, dt\, d\beta_1 \ldots d\beta_{m-r}\, d\widetilde{\beta}_1 \ldots d\widetilde{\beta}_{m-r} \equiv \overline{F} \qquad (3)$$

и обозначим $\widehat{F} \equiv F - \overline{F}$.

Для рассмотрения вопросов устойчивости стационарного резонансного режима на неограниченном промежутке времени следует преобразовать систему (2) точнее, чем это было сделано в работе [3]. Произведем замену переменных

$$x = \xi + \varepsilon u^{(1)}(\eta, \widetilde{\eta}, \beta, \widetilde{\beta}, t) + \varepsilon u^{(2)}(\eta, \widetilde{\eta}, \beta, \widetilde{\beta}, t)\,\xi + \varepsilon^2 U(\eta, \beta, t),$$

$$\varphi = \eta + \varepsilon v^{(1)}(\eta, \widetilde{\eta}, \beta, \widetilde{\beta}, t) + \varepsilon v^{(2)}(\eta, \widetilde{\eta}, \beta, \widetilde{\beta}, t)\,\xi + \varepsilon^2 V(\eta, \beta, t).$$

В окрестности стационарной резонансной точки x_0, φ_0 переменные ξ и η разложены следующим образом:

$$\xi = x_0 + \varepsilon\delta x + \varepsilon^2\Delta x + z + O(\varepsilon^3),$$

$$\eta = \varphi_0 + \varepsilon\delta\varphi + y + O(\varepsilon^2).$$

Предполагается, что функции f и g и их частные производные до второго порядка включительно по переменным x, $\widetilde{x}$, ψ, $\widetilde{\psi}$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной $\mu(t, s)$, подчиняющейся условиям

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds \leqslant ct,$$

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, P(t, s)\, ds \leqslant t^2\psi(t), \qquad (4)$$

где $\psi(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, а $P(t, s)$ — многочлен от переменных t и s. В этих предположениях для функций $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ получаются дифференциальные уравнения в частных производных следующего вида:

$$\left[\frac{\partial(u^{(1)}+u^{(2)}x_0)}{\partial\beta}+\frac{\partial(u^{(1)}+u^{(2)}x_0)}{\partial\tilde{\beta}}\right]\Omega(x_0)+\frac{\partial(u^{(1)}+u^{(2)}x_0)}{\partial t}=\hat{X}\Big|_{\substack{x=x_0,\\ \tilde{x}=x_0}},$$

$$\left[\frac{\partial(u^{(1)}+u^{(2)}x_0)}{\partial\eta}+\frac{\partial(u^{(1)}+u^{(2)}x_0)}{\partial\tilde{\eta}}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x_0)+$$

$$+\left[\frac{\partial(u^{(1)}+u^{(2)}x_0)}{\partial\beta}+\frac{\partial(u^{(1)}+u^{(2)}x_0)}{\partial\tilde{\beta}}\right]\frac{\partial\Omega}{\partial x}(x_0)+$$

$$+\left[\frac{\partial u^{(2)}}{\partial\beta}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial\tilde{\beta}}\right]\Omega(x_0)=\frac{\partial\hat{X}}{\partial x}+\frac{\partial\hat{X}}{\partial\tilde{x}}\Big|_{\substack{x=x_0,\\ \tilde{x}=x_0}}. \quad (5)$$

Уравнения для функций $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, U и V имеют сходную структуру.

Координаты x_0, φ_0 стационарной резонансной точки находятся из уравнений

$$\overline{X}(x_0, x_0, \varphi_0, \varphi_0)=0, \quad \lambda(x_0)=0. \quad (6)$$

Для определения величин δx, Δx и $\delta\varphi$ получаются рекуррентным образом линейные алгебраические уравнения.

Функции z и y определяются системой в вариациях с запаздыванием, сходной с приведенной в [4] для случая обыкновенных дифференциальных уравнений. В предположении достаточной малости z и y для $t<0$, например,

$$z, y=O(\varepsilon^2)$$

система для z и y преобразуется:

$$\dot{u}=M(\varepsilon)u+\varepsilon f^*(u, t, \varepsilon), \quad (7)$$

где $u=\{z, y\}$, уже не содержащей запаздывания. Системы вида (7) изучались в [4], поэтому дальнейшее исследование на устойчивость тривиального решения системы в вариациях (7) на неограниченном промежутке времени проводится согласно результатам [4].

Сформулируем основные требования теоремы об устойчивости стационарного резонансного режима на неограниченном промежутке времени.

Функции X, Ψ, f и g определены, непрерывны и равномерно ограничены в некоторых областях изменения своих аргументов вместе с частными производными до второго порядка включительно. Функции f и g удовлетворяют указанным выше условиям (4).

Выполнены требования существования средних значений вида (3) для ряда известных функций правых частей системы (1).

Существуют решения (x_0, φ_0) системы (6) и уравнений для δx, Δx и $\delta\varphi$. Существуют ограниченные решения уравнений (5) для функций $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ и сходных уравнений для $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, U и V.

Для матрицы $M(\varepsilon)$ и функций f^* системы в вариациях (7) выполнены условия работы [4], обеспечивающие устойчивость тривиального решения системы (7) на неограниченном промежутке времени.

При выполнении этих требований для произвольного $\delta>0$ существуют $\varepsilon_0>0$ и $c>0$, такие, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ решение системы (7), удовлетворяющее условию $\|u\|\,|_{t=0}<\delta\varepsilon^2$, определено в области $\|u\|<R$, где $R>0$ — некоторая достаточно малая фиксированная постоянная, для всех $0\leqslant t<\infty$ и удовлетворяет неравенству $\|u\|<$ $<C\varepsilon^{3/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент, 1971.
2. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М., 1976.

3. Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1977, 18, № 3.
4. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., 1971.

Поступила в редакцию
9.2 1977 г.
Кафедра
математики

УДК 539.1.01

О. Г. Горяга

К ТЕОРИИ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯДА В СРЕДЕ

В настоящей работе рассматривается излучение при движении заряда по винтовой линии в среде в ультрарелятивистском случае. Получены спектральное и угловое распределения интенсивности излучения с учетом поляризации.

Общая формула для дифференциальной интенсивности излучения, описывающая поляризационные эффекты, возникающие при синхротронном излучении в прозрачной изотропной среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$ и $\mu=\mu(\omega)$, были получены в работе [1]:

$$dW(\theta_0)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{e\beta_{\perp}}{R}\right)^2\frac{\mu c\nu^2}{n\,|1-n^2\beta_{\parallel}^2|}\,|1+n\beta_{\parallel}\cos\theta_0|\times$$

$$\times\left[\operatorname{ctg}\theta_0\, J_\nu(\nu x)\, l_\pi+l_\sigma\,\delta l\, J'_\nu(\nu x)\right]^2\sin\theta_0\, d\theta_0, \tag{1}$$

где

$$\cos\theta_0=\frac{\cos\theta-n\beta_{\parallel}}{1-n\beta_{\parallel}\cos\theta},\quad \sin\theta_0=\frac{\sin\theta\sqrt{1-n^2\beta_{\parallel}^2}}{l\,(1-n\beta_{\parallel}\cos\theta)};$$

$$x=\delta\sin\theta_0,\quad \delta=\frac{n\beta_{\perp}}{\sqrt{1-n^2\beta_{\parallel}^2}},$$

$$l=\operatorname{sign}(1-n\beta_{\parallel}\cos\theta),\quad \beta_{\parallel}=v_{\parallel}/c,\quad \beta_{\perp}=v_{\perp}/c,$$

θ — азимутальный угол сферической системы координат, $n=\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$ — показатель преломления среды, R — радиус винтовой линии, $v_{\parallel}$ — составляющая скорости заряда оси винтовой линии, $v_{\perp}$ — поперечная составляющая скорости, J_ν — функция Бесселя ν-го порядка. Частота излучения ν-той гармоники $\omega_\nu=\nu\omega$, где $\omega_0=v_{\perp}R^{-1}|1-n\beta_{\parallel}\cos\theta|^{-1}$. При $l_\pi=1$ и $l_\sigma=0$ ($l_\pi=0$ и $l_\sigma=1$) получаем интенсивность излучения линейной поляризации для π- (σ-)компонента, а при $l_\pi=l_\sigma=1/\sqrt{2}$ ($l_\pi=-l_\sigma=1/\sqrt{2}$) — интенсивность излучения, соответствующую правой (левой) круговой поляризации [2].

Рассмотрим излучение в среде с показателем преломления, близким к единице,

$$n=1+\Delta n,\quad |\Delta n|\ll 1,\quad |\Delta n|\ll 1-\beta_{\parallel}^2$$

ультрарелятивистского заряда, для которого

$$\beta_0=\frac{\beta_{\perp}}{\sqrt{1-\beta_{\parallel}^2}}\simeq 1,\quad \sin^2\theta_0\simeq 1. \tag{2}$$

Тогда в области (2) величина x удовлетворяет условию

$$1-x^2=1-\delta^2+\cos^2\theta_0\ll 1,\quad (1-\delta^2\simeq 1-\beta_0^2-2\Delta n)$$

и для функций Бесселя в равенстве (1) применима следующая асимптотика [3]: