УДК 530.12 : 531.51

**Г. С. Асанов**

# СТРУКТУРА СКАЛЯРНОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ С АБСОЛЮТНЫМ ПАРАЛЛЕЛИЗМОМ

В настоящей работе с помощью методов теории пространств Финслера найдена зависимость скалярного и электромагнитного полей от векторов касательных пространств пространственно-временного многообразия с абсолютным параллелизмом.

Рассмотрим в качестве первичной геометрической структуры четырехмерного дифференцируемого многообразия событий структуру его абсолютного параллелизма (см. [1—3]), которая определяется дифференцируемым полем реперов $S^n_A(x)$, состоящих из четырех линейно независимых в каждой точке контравариантных векторов, а также полем взаимных ковариантных реперов $S^A_n(x)$. Как показано в работах [4—6], абсолютный параллелизм наделяет многообразие обобщенной, а именно, финслеровой метрической пространственно-временной структурой, одно из частных следствий которой — риманова структура. Обратно, отправляясь от эйнштейновской теории гравитации, основанной на римановой метризации, естественно подчинить векторные поля абсолютного параллелизма $S^n_A(x)$ условию отсутствия источников, т. е. потребовать равенства нулю ковариантной римановой дивергенции этих полей (см. [3]).

Введение абсолютного параллелизма дает интересную конструктивную возможность, сохраняя исходные представления и основные ковариантные уравнения эйнштейновской теории гравитации, дополнить теорию физических полей на дифференцируемом пространственно-временном многообразии так, чтобы однозначно определить их зависимость не только от координат $x^n$ многообразия, но и от векторов $\dot{x}^n$ касательных пространств $T(x)$.

Совокупность координат $x^n$ и линейных векторных пространств $T(x)$ образует касательное расслоение пространственно-временного многообразия. Основной элемент этого многообразия — пара $(x^n, \dot{x}^n)$, которая называется линейным опорным элементом. Обычно физические поля изучают как функции только координат $x^n$, а их зависимостью от касательных векторов $\dot{x}^n$ не интересуются. Однако при стремлении исследовать внутренние симметрии физических полей и их взаимодействий возникает необходимость общего рассмотрения зависимости полей от линейных опорных элементов, причем касательные векторы интерпретируются как векторы внутреннего пространства (см., например, [7, 8]). В работах [9, 10] предпринята попытка сформулировать ковариантные уравнения полей на касательном расслоении с помощью общих геометрических методов, однако при этом геометрическая структура пространства-времени не конкретизировалась. Поэтому предрасслоении пространства-времени с абсолютным параллелизмом, поскольку введение такой простой и естественной структуры, как абсолютный параллелизм (которая, начиная с Эйнштейна [11], использовалась ставляет интерес развитие теории физических полей на касательном в общей теории относительности многими авторами (см. [2])), позволяет дать простое решение вопроса о зависимости полей от $\dot{x}^n$, как мы увидим ниже на примерах скалярного и электромагнитного полей.

Следующие два принципа играют при этом основную роль. Во-первых, *принцип соответствия*: физическое поле, зависящее только от $x$, должно совпадать со своим обобщением, взятым на $S$-конгруэнции, касательной к векторному полю

$$S^n(x) = \sum_{A=1}^{4} S^n_A(x).$$

Во-вторых, *принцип инвариантности*: обобщенное поле должно быть инвариантно по переменным $\dot{x}^n$ относительно группы симметрии финслеровой метрической функции, т. е. относительно группы Ли симметрии финслерова метрического тензора $f_{nk}(\dot{x}, x)$ по переменным $\dot{x}^n$.

Теория гравитационного поля на касательном расслоении, очевидно, удовлетворяющая этим двум принципам, подробно развита в [4, 6, 14]. Настоящая работа — их продолжение, и ниже мы используем результаты [4] в тех же обозначениях и, как правило, специально на нее не ссылаясь.

### § 1. Группа инвариантности по переменным $\dot{x}$

Как показано в работе [5], финслеров метрический тензор в $T(x)$ конформно плоский. Нетрудно заметить, что конформный множитель равен степени $-2$ от основной метрической функции, т. е. $F^{-2}(x, \dot{x})$. Поэтому существует такое нелинейное преобразование векторов $T(x)$

$$\dot{x}^n = \varphi^n(z^P), \tag{1}$$

после которого тензор $F^2 f_{mn}$ становится псевдоевклидовым. Искомое преобразование, очевидно, является решением системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi^A}{\partial z^P} = F(\varphi^B)\, f^A_P(\varphi^B) \tag{2}$$

для функций $\varphi^A(z^P) = S^A_n \varphi^n(z^P)$. Согласно выражениям (4) из [4] для финслеровой ортонормированной тетрады $f^A_P$, правая часть уравнения (2) — линейная функция от $\varphi^B$. Общее решение может быть записано в виде

$$\varphi^A(z^P) = c^A \exp(S^A_P z^P), \tag{3}$$

где константы $S^A_P = S^A_n f^n_P(S^B)$ равны

$$\|S^A_P\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{8/3} & -\sqrt{2/3} & -\sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{matrix} \right\| \tag{4}$$

В этой матрице $P=0, 1, 2, 3$ — номер строки, $A=1, 2, 3, 4$ — номер столбца. Константы интегрирования $c^A$ мы в дальнейшем полагаем равными единице.

Якобиан преобразования (3) будет равен $I=-16F^4$. Преобразование, обратное (3), имеет вид

$$z^P(\dot{x})=S_A^P \ln \dot{x}^A, \tag{5}$$

где $S_A^P=\frac{1}{4}S_P^A$. В частности,

$$z^0=\frac{1}{4}\sum_{A=1}^{4}\ln \dot{x}^A=\ln F, \tag{6}$$

и обратно

$$F=e^{z^0}. \tag{7}$$

Следовательно, после преобразования (1) финслеров метрический тензор будет пропорционален псевдоевклидову тензору $\eta^{PQ}$:

$$f^{PQ}(z^R)=e^{-2z^0}\eta^{PQ}. \tag{8}$$

Итак, мы видим, что в переменных $z^P$ группой инвариантности финслерова метрического тензора является трехмерная группа Пуанкаре. Трансляции $z^\alpha=\tilde{z}^\alpha+a^\alpha$, $\alpha, \beta=1, 2, 3$, вызывают линейное однородное унимодулярное преобразование $T(x)$ в переменных $\dot{x}$, оставляющее инвариантной индикатрису, т. е. кинематическое преобразование [см. 4]. Пространственные вращения $z^\alpha=\tilde{z}^\beta R_\beta^\alpha$ с постоянными коэффициентами $R_\beta^\alpha$ вызывают нелинейное преобразование $T(x)$, также оставляющее инвариантной индикатрису.

## § 2. Скалярное поле в $T(x)$

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x, \dot{x})$. Согласно принципу соответствия функция $\varphi(x)=\varphi(x, S(x))$ должна удовлетворять уравнению Клейна — Гордона. Естественно записать аналогичное уравнение и по переменным $\dot{x}$, а именно

$$\left(F^2\frac{1}{\sqrt{-f(\dot{x})}}\frac{\partial}{\partial\dot{x}^n}\sqrt{-f(\dot{x})}\,f^{nm}\frac{\partial}{\partial\dot{x}^m}+\mu^2\right)\varphi(x, \dot{x})=0, \tag{9}$$

где $\mu$ — константа и

$$f(\dot{x})=\det f_{mn}=-\left(\frac{1}{16}\det S_n^A\right)^2 \tag{10}$$

(см. [5]). Первый член уравнения (9) без множителя $F^2$ — ковариантный даламбертиан функции $\varphi$ в $T(x)$. Множитель $F^2$ добавляется для сохранения однородности функций по $\dot{x}$. Принцип инвариантности для уравнения (9), очевидно, удовлетворяется.

Совершая преобразование (1) и учитывая (8), получим

$$e^{-2z^0}\frac{\partial}{\partial z^P}e^{2z^0}\eta^{PQ}\frac{\partial}{\partial z^Q}\varphi+\mu^2\varphi=0 \tag{11}$$

или просто

$$\eta^{PQ}\frac{\partial^2}{\partial z^P\partial z^Q}\varphi+\mu^2\varphi+2\frac{\partial\varphi}{\partial z^0}=0. \tag{12}$$

В этом уравнении постоянные коэффициенты и оно имеет решения в виде плоских волн

$$\varphi_k(x, z) = b_k(x)\, e^{ik_P z^P}, \tag{13}$$

где волновые векторы должны удовлетворять дисперсионному соотношению

$$\eta^{PQ} k_P k_Q - 2ik_0 = \mu^2. \tag{14}$$

Подставляя (5), мы преобразуем решение (13) в $T(x)$. Получим

$$\varphi_k(x, \dot{x}) = b_k(x) \prod_{A=1}^{4} (\dot{x}^A)^{ik_P S_A^P} =$$

$$= a_k(x)\,[F(x, \dot{x})]^{ik_0} \prod_{A=1}^{4} (\dot{x}^A)^{ik_\alpha S_A^\alpha}. \tag{15}$$

Поскольку $\varphi_k(x, S) = b_k(x)$, то $b_k(x)$ являются решениями обычного уравнения Клейна — Гордона.

Итак, мы нашли решение для скалярного поля $\varphi(x, \dot{x})$ в виде суперпозиции решений (13), которые можно интерпретировать как нелинейные волны в $T(x)$ в переменных $\dot{x}$. Только в достаточно малой окрестности векторов $\dot{x}^n = \mathrm{const}\, S^n(x)$ в $T(x)$ они приближенно являются плоскими волнами в переменных $\dot{x}$.

## § 3. Электромагнитное поле в $T(x)$

Будучи векторным, электромагнитное поле на касательном расслоении должно описываться векторным полем $A_n(x, \dot{x})$, причем в силу принципа соответствия обычный векторный потенциал равен $A_n(x) = A_n(x, S(x))$. Запишем разложение по $f$-базису

$$A_n(x, \dot{x}) = A_P f_n^P(x, \dot{x}). \tag{16}$$

Естественно потребовать, чтобы векторный потенциал оставался инвариантным при преобразовании от одной локальной инерциальной системы отсчета к другой. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции $A_P$ зависели только от $x$, но не от $\dot{x}$. Контравариантные компоненты будут равны

$$A^n(x, \dot{x}) = A^P(x)\, f_P^n(x, \dot{x}), \tag{17}$$

где $A^P(x) = A_Q(x)\eta^{PQ}$. $P$ и $Q$ — тетрадные индексы. Компоненты обычного векторного потенциала в мировых индексах равны $A_n(x) = A_P(x)\, f_n^P(x, S(x))$.

Калибровочные условия удобно выбрать так, чтобы

$$A_0(x) = S^n(x)\, A_n(x) = 0. \tag{18}$$

Отметим, что такое условие инвариантно вследствие выделенной природы векторного поля $S^n(x)$. Это позволяет устранить известную трудность неинвариантности аналогичного условия в теории поля, в которой принимаются во внимание только римановы геометрические свойства пространства-времени (см., например, [13, с. 43]).

Используя тождества для $f$-реперов, приведенные в работах [4, 6], находим выражение для тензора электромагнитного поля в $T(x)$:

$$\widetilde{F}_{nm}(x, \dot{x}) = \left(\frac{\partial A_m(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^n} - \frac{\partial A_n(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^m}\right) F(x, \dot{x}) =$$

$$= A_\alpha(x)\left(f_n^0(x, \dot{x}) f_m^\alpha(x, \dot{x}) - f_n^\alpha(x, \dot{x}) f_m^0(x, \dot{x})\right) \tag{19}$$

($\alpha=1, 2, 3$), откуда в силу тех же тождеств следует, что векторный потенциал является с точностью до константы плотностью тока в $T(x)$, т. е.

$$j^n(x, \dot{x}) = \frac{F(x, \dot{x})}{\sqrt{-f(x)}} \frac{\partial \sqrt{-f(x)}\, \widetilde{F}^{mn}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^m} =$$

$$= F(x, \dot{x}) \frac{\partial \widetilde{F}^{mn}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^m} = 2A^n(x, \dot{x}). \tag{20}$$

Векторный потенциал $A_n(x)$ естественно, как обычно, подчинить лоренцевой калибровке, которая вместе с условием (18) однозначно определит векторный потенциал во всем пространстве, а следовательно, однозначно определит внутренний ток, или, другими словами, зависимость вектора плотности тока от $\dot{x}$. Вследствие условия (18) и тождеств для $f$-реперов, условие лоренцевой калибровки выполняется также и в $T(x)$, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{-f(x)}} \frac{\partial \sqrt{-f(x)}\, A^n(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^n} = \frac{\partial A^n(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^n} = 0. \tag{21}$$

Сравнивая (20) и (21), мы видим, что оно эквивалентно условию сохранения плотности внутреннего электрического тока в $T(x)$.

Итак, структура электромагнитного поля в $T(x)$ полностью выяснена. Скалярная функция $F(x, \dot{x})$ добавляется в определение тензора электромагнитного поля в $T(x)$ (19) для того, чтобы этот тензор так же, как и векторный потенциал, обладал условием однородности нулевой степени по касательным векторам $\dot{x}$. Группа внутренней инвариантности электрического поля — трехмерная группа Пуанкаре в переменных $z^p$ из § 1.

## § 4. Усреднение полей

Финслерова структура пространства-времени с абсолютным параллелизмом позволяет ввести в рассмотрение статистическую функцию распределения (см. [5]) $f(x, \dot{x})$ для гравитационного поля. Уравнение Лиувилля в финслеровом пространстве имеет вид

$$\dot{x}^m \left(\frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x^m} - \dot{x}^n P^k_{mn}(x, \dot{x}) \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k}\right) = 0, \tag{22}$$

где $P^k_{mn}$ — коэффициенты связности (см. [12]). Как известно (см. [12, гл. III]), это уравнение всегда имеет решение

$$f(x, \dot{x}) = \varphi(F(x, \dot{x})), \tag{23}$$

где $F$ — основная метрическая функция финслерова пространства, а $\varphi(F)$ — произвольная функция, которая не определяется уравнением (22) вследствие его линейности.

Нетрудно показать, что $S^m(x)$ — поле средних скоростей гравитационного поля. Действительно, гидродинамическая плотность гравитационного поля

$$\rho = \int \delta(\dot{x}^n S_n(x) - 1) f(x, \dot{x}) \sqrt{-f(x)}\, d^4\dot{x}^k, \tag{24}$$

как можно видеть, — константа. Поэтому нужно доказать справедливость равенства

$$S^m(x) = \mathrm{const} \int \dot{x}^m \delta(\dot{x}^n S_n(x) - 1) f(x, \dot{x}) \sqrt{-f(x)}\, d^4\dot{x}^k S_n(x). \tag{25}$$

Введение в подынтегральное выражение дираковской $\delta$-функции необходимо для того, чтобы относительно уединенного наблюдателя, имеющего скорость $S^m(x)$, интегрирование проводилось только по трем переменным пространственным компонентам скорости $V^\alpha = S_n^\alpha(x)\dot{x}^n$, но не по четвертой временной компоненте. Совершая замену базиса в $T(x)$ посредством $\dot{x}^m = S_A^m \dot{x}^A$ и учитывая (10), легко убедиться в справедливости равенства (25) независимо от конкретного вида функции $\varphi(F)$ (подробнее см. в [14]).

Таким образом, возможно последовательное рассмотрение гравитационного поля как статистической среды при помощи гидродинамической аналогии. Именно финслерова структура пространства-времени с абсолютным параллелизмом описывает эти статистические свойства. Зависимость физических полей от $\dot{x}$ можно интерпретировать как зависимость от возможных скоростей течения гравитационного поля. Можно ожидать, что после усреднения полей по векторам $\dot{x}$ с функцией распределения (23) они перейдут в обычные поля, зависящие только от $x$, в согласии с принципом соответствия, как мы его сформулировали вначале. Такое утверждение действительно имеет место. Оно проверяется аналогично (25). После усреднения финслеров метрический тензор $f_{mn}(x, \dot{x})$ перейдет в риманов метрический тензор $g_{mn}(x) = f_{mn}(x, S(x))$, $A^n(x, \dot{x})$ перейдет в $A^n(x) = A^n(x, S(x))$, скалярное поле (15) — в $b_h(x)$.

В заключение автор выражает благодарность проф. А. А. Соколову за поддержку.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Slebodzinski W. Exterior Forms and Their Applications. Warszawa, 1970.
2. Тредер Г. Теория гравитации и принцип эквивалентности. М., 1973.
3. Родичев В. И. Теория тяготения в ортогональном репере. М., 1974.
4. Асанов Г. С. — «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1976, 17, № 3, 288.
5. Асанов Г. С. — В кн.: Проблемы геометрии. М., 1976, с. 110.
6. Asanov G. S. — «An. Phys.», 1977, 34, N 3, 169.
7. Drechsler W. — «Fortschr. Phys.», 1975, 23, 607.
8. Roman P., Aghassi J. J., Huddelston P. L. — «J. of Math. Phys.», 1972, 13, 1852.
9. Horvath J. I. — «Nuovo Cimento», 1958, 9, 444.
10. Takano Y. — «Progr. Theor. Phys.», 1962, 40, 1159.
11. Эйнштейн А. Собр. научн. трудов. Т. 2. М., 1966.
12. Rund H. The Differential Geometry of Finsler Spaces. Berlin, Springer-Verlag, 1959.
13. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1973.
14. Asanov G. S. «Rep. Math. Rhys.», 1977, N 2.
15. Власов А. А. Статистические функции распределения. Гл. 5. М., 1966.


Поступила в редакцию
10.1 1977 г.
Кафедра
теоретической физики