

УДК 533.9;537.5

А. П. Ершов  
В. А. Довженко  
Г. С. Солнцев

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ  
ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ЭЛЕКТРОНОВ ПО ЭНЕРГИЯМ  
МЕТОДОМ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Предлагается оценка второй производной ионного тока на зонд, необходимая для определения функции распределения электронов по энергиям специального вида. Обсуждаются различные способы экспериментального исключения влияния ионного тока на измерение функции распределения электронов.

В настоящее время единственным, практически осуществленным методом измерения функции распределения электронов по энергиям в низкотемпературной плазме низкого давления является метод второй производной, основанный на формуле Драйвестейна [1, 2]:

$$f''(V) = \frac{2V^2}{S_e N_e} \sqrt{\frac{m}{e}} \sqrt{V_3} \frac{d^2 i_e}{dV_3^2}, \quad (1)$$

где  $f_0(V)$  — функция распределения, определяемая равенством  $dn = N_e f_0(V) dV$ ,  $V$  — потенциал плазмы относительно потенциала зонда,  $V = V_3 \sqrt{\frac{mv^2}{2e}}$  — потенциал, соответствующий энергии электронов (эВ),  $S$  — площадь зонда,  $e$ ,  $m$ ,  $N_e$  — абсолютное значение заряда, массы и концентрации электронов,  $i_e$  — ток электронов, идущих из плазмы на зонд.

При определении величины  $i_e'' = d^2 i_e / dV_3^2$  радиотехническими методами [1, 2] ее обычно отождествляют со второй производной полного тока на зонд  $i_s'' = i_e'' + i_p''$ . При этом предполагается, что

$$|i_p''| \ll |i_e''|, \quad (2)$$

где  $i_p''$  — вторая производная ионного тока на зонд.

В связи с тем что в плазме газового разряда большую роль играют процессы возбуждения и ионизации, необходимо измерение функции распределения в области высоких энергий. Получение  $f_0(V)$  в далекой энергетической области повышения чувствительности аппаратуры наталкивается на эффект влияния ионного тока. Действительно, как было показано в [3], для случая максвелловского распределения электронов по энергиям неравенство (2), начиная с некоторых энергий, перестает выполняться и  $i_s''$  слабо меняется при увеличении потенциала зонда. Область энергий, в которой выполняется неравенство (2), зависит от рода газа и отношения  $\lambda_{De}/a$  ( $\lambda_{De}$  — электронный дебаевский радиус,  $a$  — радиус цилиндрического зонда). Чем тяжелее газ и меньше отношение  $\lambda_{De}/a$  (при  $\lambda_{De}/a < 1$ ), тем в большей области энергий возможно надежное определение  $f_0(V)$ . Выводы работы [3]

были экспериментально подтверждены в [4], авторы которой использовали зонды разных диаметров для измерения функции распределения в широкой области энергий.

Область потенциалов зонда, при которых сказывается влияние второй производной ионного тока, обнаруженная экспериментально в [4, 5], согласуется с расчетами работы [3], несмотря на то что функции распределения, измеренные в [4 и 5], отличались от максвелловской. Очевидно область, в которой справедливо неравенство (2), зависит от вида функции распределения. Причем в случае обогащенной в области высоких энергий функции распределения вопрос о том, где начинается влияние  $i_p''$  и не является ли обогащение функции распределения кажущимся, не всегда правильно может быть разрешен интуитивно. Поэтому в данной работе дается теоретическая оценка влияния второй производной ионного тока на измерение функций распределения электронов по энергиям, отличающихся от максвелловской.

Рассмотрим функции распределения, имеющие один максимум. Более того, ограничимся классом функций, для которых в работах [6, 7] построена теория ионного тока на зонд. Этот достаточно широкий и близкий к встречающимся в эксперименте класс функций распределения описывается выражением вида

$$f_0(V) = C_k V \sqrt{V} \exp \left\{ - \left( \frac{V}{\alpha} \right)^k \right\}, \quad (3)$$

где  $k$  — параметр,  $C_k = k / \left[ \alpha^{3/2} \Gamma \left( \frac{3}{2k} \right) \right]$  — нормировочная постоянная,

$$\alpha = \langle V_e \rangle \Gamma \left( \frac{3}{2k} \right) / \Gamma \left( \frac{5}{2k} \right), \quad \langle V_e \rangle = \int_0^{\infty} V f_0(V) dV, \quad (4)$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция. Для второй производной электронного тока на единицу длины цилиндрического зонда из (1) и (3) имеем

$$i_e'' = - \frac{\pi a e N_e}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{e}{m}} C_k \exp \left\{ - \left( \frac{V_3}{\alpha} \right)^k \right\}. \quad (5)$$

Для определения  $i_p''$  воспользуемся лимитационными формулами, выведенными в [7] для цилиндрического зонда:

$$i_p = 2\pi r_p e N_e \sqrt{\frac{2e \langle V_e \rangle}{M}} \beta^*(\omega, k), \quad (6)$$

$$i_p = \frac{2\sqrt{2}}{9} \sqrt{\frac{e}{M}} \frac{V_3^{3/2}}{a \beta^2(r_p/a)}, \quad (7)$$

где  $r_p$  — радиус слоя,  $M$  — масса иона  $\beta^2 \left( \frac{r_p}{a} \right)$  — табулированная функция [8],  $\beta^*(\omega, k) = \beta^*(k)$  в неизотермической плазме с холодными ионами,  $\omega = \frac{\epsilon_0}{e \langle V_e \rangle}$ ,  $\epsilon_0$  — энергия иона. В формуле (6) зависимость ионного тока от вида функции распределения учитывается с помощью коэффициента  $\beta^*(k)$ , а в остальном выражения (6) и (7) аналогичны случаю максвелловского распределения. Это позволяет найти  $i_p''$  способом, использованным в [3]. Введем обозначения:  $x = r_p/a$ ,  $\eta = \frac{3V_3}{2 \langle V_e \rangle}$ ,

$$\varphi(x) = x \beta^2(x), \quad h_k^2 = \frac{\langle V_e \rangle}{4\pi e N_e} \frac{\Gamma^2(3/2k)}{k \Gamma(5/2k) \Gamma(1 + 1/2k)}.$$

Согласно [6]  $h_k$  является электронным дебаевским радиусом для функций распределения вида (3). Аналогично [3], для отношения вторых производных электронного и ионного токов получим

$$\frac{i_e''}{i_p''} \equiv \chi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\Gamma(5/2k)}{\Gamma(3/2k)}} \frac{1}{\Gamma(1/2k + 1)} \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{a}{h_k}\right)^2 \eta^{1/2} \Phi(x) \times \exp\left\{-\eta^k \left[\frac{2}{3} \frac{\Gamma(5/2k)}{\Gamma(3/2k)}\right]^k\right\}. \quad (8)$$

Зависимость  $\chi(\eta)$  определяется выражением

$$\Phi(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{7/2} \frac{k\Gamma(5/2k)\Gamma(1/2k + 1)}{\Gamma^2(3/2k)} \frac{1}{\beta^*} \left(\frac{h_k}{a}\right)^2 \eta^{3/2}. \quad (9)$$

Функции  $\phi(x)$  и  $\Phi(x)$  протабулированы в [3]. Поскольку расчет, проведенный в данной работе, не может охватить все возможные случаи, а использование таблиц работы [3] при машинном счете неудобно, в приложении даются расчетные формулы для  $\phi(x)$  и  $\Phi(x)$ . Зависимость  $\beta^*(\omega, k)$  рассчитана в [7].

Если условие лимитационного движения не выполнено, т. е. при

$$x > \frac{\sqrt{2/3}}{\pi\beta^*(\omega, k)} \sqrt{\eta}, \quad (10)$$

для расчета ионного тока на единицу длины зонда необходимо использовать формулу орбитальной теории [9], которая не зависит от вида функции распределения электронов по энергиям

$$i_p = 2eN_e a \sqrt{\frac{2eV_3}{M}}. \quad (11)$$

В этом случае имеем

$$\chi = \pi \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{k\Gamma^{3/2}(5/2k)}{\Gamma^{5/2}(3/2k)} \sqrt{\frac{M}{m}} \eta^{3/2} \exp\left\{-\eta^k \left[\frac{2}{3} \frac{\Gamma(5/2k)}{\Gamma(3/2k)}\right]^k\right\}. \quad (12)$$

Заметим, что неравенство (10) хорошо выполняется при  $h_k/a \geq 1$ .

Результат расчета зависимости  $\chi$  от  $\eta$  позволяет определить область потенциалов зонда, в которой можно уверенно измерять вторую производную электронного тока на зонд. Наиболее наглядно результаты расчета могут быть представлены в виде сравнения зависимостей

$$\psi_e = i_e''(\eta)/i_e''(0), \quad \psi_p = i_p''(\eta)/i_p''(0) \text{ и } \psi = i''(\eta)/i_e''(0) \text{ от } \eta.$$

Для этих зависимостей могут быть написаны следующие выражения:

$$\psi_e(\eta) = \exp\left\{-\left[\eta \frac{2\Gamma(5/2k)}{3\Gamma(3/2k)}\right]^k\right\}, \quad (13)$$

$$\psi_p(\eta) = \psi_e/\chi, \quad (14)$$

$$\psi(\eta) = \psi_e \frac{1 + \chi}{\chi}, \quad (15)$$

которые представляют собой нормированные на максимальное значение  $i_{e\max}'' = i_e''(0)$  вторые производные электронного, ионного и полного токов на зонд. Расчет был проведен для газа с молекулярным весом  $A=1$ . Пересчет значений  $\psi_p$  для других газов осуществляется делением  $\psi_p$  на  $\sqrt{A}$  (см. формулу (8)).

Из рис. 1 видно, что независимо от вида функции распределения диапазон энергий, в котором выполнено неравенство (2), расширяется при уменьшении  $h^k/a$  при  $h^k/a < 1$ . При  $h^k/a \geq 1$ , согласно (12), отношение вторых производных не зависит от  $h^k/a$ . Этот результат следует учитывать при применении метода двух зондов разной толщины. В частности, авторы работы [5] при исследовании влияния толщины

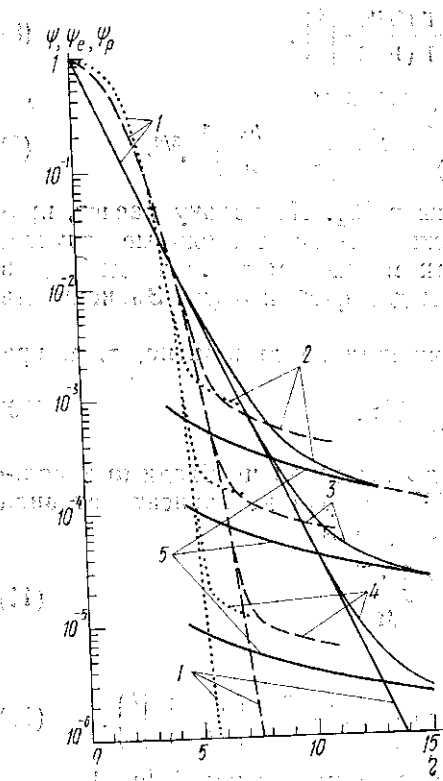


Рис. 1. Зависимость  $\psi, \psi_e, \psi_p$  от  $\eta$  (—  $k=1$ ; ---  $k=2$ ; ...  $k=3$ ). 1 —  $\psi_e$ , 2 —  $\psi$  при  $h_k/a \geq 1$ , 3 —  $\psi$  при  $h_k/a = 10^{-1}$ , 4 —  $\psi$  при  $h_k/a = 10^{-2}$ , 5 —  $\psi_p$

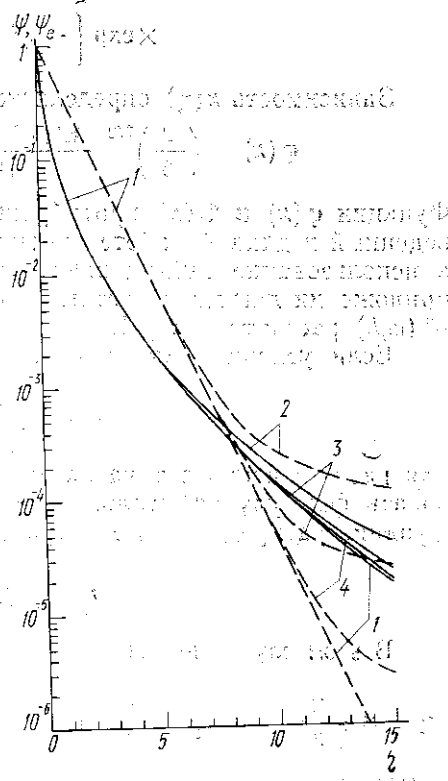


Рис. 2. Зависимость  $\psi$  и  $\psi_e$  от  $\eta$  (—  $k=0,5$ ; ---  $k=1$ ). Оба значения те же, что на рис. 1

зонда на вторую производную зондового тока при малых потенциалах зонда не обнаружили влияния толщины зонда на вторую производную полного тока при больших потенциалах именно из-за того, что выполнялось соотношение  $h_1/a \geq 1$ . В работе [4] для одного из зондов выполнялось неравенство  $h_1/a < 1$ , и поэтому предложенный в [4] метод оказался работоспособным. Более того, как показывают наши расчеты, метод работы [4] можно использовать и для функций, отличающихся от максвелловских (см. рис. 1).

При увеличении  $k$ , т. е. при уменьшении относительной доли быстрых электронов, диапазон энергий, в котором выполнено неравенство (2), сужается. Незначительный рост второй производной ионного тока при увеличении  $k$  (при  $k > 1$ ) играет при этом малую роль. Как видно из рис. 1, для функций распределения, спадающих быстрее максвелловских ( $k > 1$ ), можно для оценок использовать  $\psi_p$ , рассчитанные для максвелловского распределения ( $k=1$ ). Более того, эти результаты

можно использовать и в случае, когда функция распределения не описывается строго формулой (3), так как конкретный вид функции распределения влияет лишь на величину  $\beta^*$  и нормировочную константу функции распределения, а такое влияние для быстро спадающих в области высоких энергий функций распределения мало. Это подтверждается также результатом сравнения данных работ [4, 5] с расчетом [3]. Поэтому для быстро спадающих функций распределения полученный результат можно считать в достаточной степени общим и слабо зависящим от деталей функции распределения.

На рис. 2 показаны сравнительные зависимости  $\psi_e$  и  $\psi$  от  $\eta$ . Ситуация в случае  $k=0,5$  (и тем более при меньших значениях  $k$ ) более благоприятная, чем при  $k \geq 1$ . Действительно, при  $k=0,5$  только в случае  $h_k/a \geq 1$  заметно влияние ионного тока при больших энергиях электронов. Однако из-за сильной зависимости  $\beta^*$  от  $k$  при  $k < 1$  уже нельзя использовать оценку  $\psi_p$  по максвелловскому распределению.

При измерениях функции распределения электронов по энергиям известны два способа выделения второй производной электронного тока [4, 5]. Можно предложить еще один способ, использующий инерционность ионного тока [10, 11]. Если частоту модулирующего сигнала  $\omega_M$  при радиотехническом выделении второй производной полного тока выбрать в диапазоне  $\omega_{Li} \ll \omega_M \leq \omega_{Le}$ , то вклад ионов будет существенно уменьшен по сравнению с обычно применяемыми частотами модуляции  $\omega_M < \omega_{Li}$ .

В последнее время разрабатывается методика измерения функции распределения, основанная на сочетании зондовых и оптических измерений [12, 13].

Ввиду того что экспериментальные методы нуждаются в серьезном обосновании и имеют ограниченную область применимости, представляется необходимым теоретический расчет поправки на ионный ток при произвольной функции распределения. Итак, в работе показано, что для функций распределения, описываемых формулой (3), основные качественные результаты, полученные в [3] в предположении максвелловского распределения, сохраняются. Более того, для функций распределения, объединенных в области высоких энергий, результаты расчета для максвелловского распределения могут быть прямо использованы для оценок. При функциях распределения, обогащенных в области высоких энергий, влияние второй производной ионного тока можно сделать незначительным в большой области энергий путем увеличения радиуса зонда.

Приложение е. 1. Приведем краткий вывод формулы (8), который может быть использован также и для сферического зонда. Из формулы (6) следует, что

$$i_p'' = 2\pi r_p^n e N_r \sqrt{\frac{2e \langle V_e \rangle}{M}} \beta^*(k), \quad (\text{II.1})$$

т. е. вторая производная ионного тока прямо пропорциональна второй производной радиуса слоя по напряжению зонда. Далее,

$$r_p'' \equiv \frac{d^2 r_p}{dV_s^2} = \frac{a}{\left(\frac{2}{3} \langle V_e \rangle\right)^2} \frac{d^2 x}{d\eta^2}. \quad (\text{II.2})$$

Перепишем уравнение (9), определяющее  $x$  как неявную функцию  $\eta$ , в виде

$$\varphi(x) = A\eta^{3/2}. \quad (\text{II.3})$$

Коэффициент  $A$ , легко определяемый из (9), в дальнейшем выводе и в окончательном выражении для  $d^2x/d\eta^2$  никакой роли не играет. Дифференцирование обеих частей (II.3) по  $\eta$  дает

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{3}{2} \frac{\varphi(x)}{\eta}, \quad (\text{II.4})$$

откуда

$$\eta = \frac{3}{2} \varphi(x) / \frac{d\varphi}{dx}. \quad (\text{II.5})$$

Повторное дифференцирование приводит к уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = \frac{3}{2} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\varphi(x)}{\eta} \right), \quad (\text{II.6})$$

Левая часть этого уравнения имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{d\eta} \right) = \frac{d^2\varphi}{dx^2} \left( \frac{dx}{d\eta} \right)^2 + \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2x}{d\eta^2}. \quad (\text{II.7})$$

Правая часть уравнения (II.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\varphi(x)}{\eta} \right) &= \frac{3}{2\eta} \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{d\eta} - \frac{3}{2} \frac{\varphi(x)}{\eta^2} = -\frac{1}{3\varphi(x)} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{3\varphi(x)} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \left( \frac{dx}{d\eta} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Подставляя выражение (II.7) и (II.8) в левую и правую части (II.6), получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \left( \frac{dx}{d\eta} \right)^2 + \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2x}{d\eta^2} = -\frac{1}{3\varphi(x)} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \left( \frac{dx}{d\eta} \right)^2. \quad (\text{II.9})$$

Разрешим это уравнение относительно  $d^2x/d\eta^2$  и преобразуем, учтя при этом, что  $\frac{dx}{d\eta} = \frac{d\varphi}{d\eta} / \frac{d\varphi}{dx}$  и формулу (II.4):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\eta^2} &= \frac{\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - 3\varphi(x) \frac{d^2\varphi}{dx^2}}{3\varphi(x) \frac{d\varphi}{dx}} \left( \frac{dx}{d\eta} \right)^2 = -\frac{3}{4} \frac{\varphi(x)}{\eta^2} \frac{3\varphi(x) \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2}{\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^3} = \\ &= -\frac{3}{4} \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} \frac{1}{\eta^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Итак, выражение для  $\frac{d^2x}{d\eta^2}$  получено. Подставляя его в (II.2) и используя выражения (II.1) и (5), получаем формулу (8).

Как уже было отмечено выше, аналогичный вывод легко проделать и для сферического зонда на основе формул работ [6, 7].

2. Приведем теперь выражения для  $\varphi(x)$  и  $\Phi(x)$ . Согласно [8] и определению  $\varphi(x)$ , имеем

$$\varphi(x) = x^2 \gamma^2(x) \Sigma_0^{3/2},$$

где

$$\gamma(x) = \ln x, \quad \Sigma_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \gamma^n.$$

Первые десять коэффициентов  $a_n$ , достаточные для счета с точностью не худшей 1%, равны  $a_0=1$ ;  $a_1=2/15$ ;  $a_2=11/450$ ;  $a_3=874/222750$ ;  $a_4=5,298 \cdot 10^{-4}$ ;  $a_5=5,972 \cdot 10^{-5}$ ;  $a_6=5,577 \cdot 10^{-6}$ ;  $a_7=4,246 \cdot 10^{-7}$ ;  $a_8=2,649 \cdot 10^{-8}$ ;  $a_9=1,35 \cdot 10^{-9}$ ;  $a_{10}=9,7 \cdot 10^{-11}$ .

Первая производная  $\varphi$  по  $x$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2x\gamma(\gamma+1)\Sigma_0^{3/2} + \frac{3}{2}x\gamma^2\Sigma_0^{1/2}\Sigma_1,$$

где

$$\Sigma_1 = \frac{d\Sigma_0}{d\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n n \gamma^{n-1}.$$

Вторая производная

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 2(\gamma^2+3\gamma+1)\Sigma_0^{3/2} + \frac{3}{2}\gamma(3\gamma+4)\Sigma_0^{1/2}\Sigma_1 + \\ &+ \frac{3}{2}\gamma^2\left(\frac{\Sigma_1}{2\Sigma_0} + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}\right)\Sigma_0^{1/2}\Sigma_1, \end{aligned}$$

где

$$\Sigma_2 = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n n(n-1)\gamma^{n-2}.$$

Учитывая, что

$$\Phi(x) = \frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^3}{3\varphi(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2},$$

можно считать, что расчетные формулы для  $\varphi(x)$  и  $\Phi(x)$  получены.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каган Ю. М. — «Beitr. Plasmaphys.», 1965, 5, 479.
2. Каган Ю. М. — В кн.: Спектроскопия газоразрядной плазмы. М., 1970.
3. Довженко В. А., Ершов А. П., Солнцев Г. С. — ЖТФ, 1974, 44, 851.
4. Асвадулов К. Д., Васильева И. А. — ЖТФ, 1975, 45, 1558.
5. Иванов Ю. А., Карабашев И. Н., Полак Л. С. Тезисы докладов II Всесоюзного симпозиума по плазмохимии. Т. I. Рига, 1975, с. 47.
6. Васильева И. А. — «Теплофизика высоких температур», 1974, 12, № 1.
7. Васильева И. А. — «Теплофизика высоких температур», 1974, 12, № 3.
8. Капцов Н. А. Электроника. М., 1953.
9. Каган Ю. М., Перель В. И. — ЖТФ, 1969, 34, 2238.
10. Годяк В. А. — «Физика плазмы», 1976, 2, № 1.
11. Грановский В. Л. Электрический ток в газе. Т. I. М., 1952.
12. Volkova L. M., Devyatov A. M., Kralkina E. A., Shushurin S. P. Proc. XI<sup>th</sup> ICPIG, Contributed Papers. Prague, 1973.
13. Волкова Л. М., Девятков А. М., Кралькина Е. А., Шериф М. А. — «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1975, 16, № 4.

Поступила в редакцию  
1.2 1977 г.  
Кафедра  
электроники