

УДК 550.388.2

В. Д. Гусев

С. М. Голынский

СТАТИСТИКА ЛУЧЕЙ

В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ ИЗОТРОПНОЙ
СРЕДЕ С ИЗОМЕРНЫМИ
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В марковском приближении описана статистика лучей в плоскослоистой изотропной среде с изомерными неоднородностями. В малоугловом приближении решение уравнения Эйнштейна — Фоккера получено в виде ряда по полиномам Эрмита. Для модели линейного слоя проведены оценки, когда в качестве решения задачи можно использовать нормальный закон распределения угловых флуктуаций. Для двух моделей высотного хода флуктуаций электронной концентрации среды проанализирована частотная зависимость угловых флуктуаций волны на выходе из линейного и параболического слоев.

Статистика флуктуаций направления распространения волны в случайно-неоднородной среде типа ионосферы может быть описана в марковском приближении при помощи уравнения Эйнштейна — Фоккера (УЭФ) [1—3].

Рассмотрим наклонное падение волны на плоскослоистую среду с крупномасштабными неоднородностями ($ka \gg 1$, $\xi \gg a$, где k — волновое число, ξ — протяженность траектории волны в среде, a — пространственный радиус корреляции рассеивающих неоднородностей, причем для ионосферных неоднородностей $a \sim (2 \cdot 10^2 - 10^3)$ м). В первом приближении, позволяющем оценить влияние регулярной рефракции среды на статистические характеристики угловых флуктуаций и значительно сократить математические расчеты, полагаем, что функция корреляции рассеивающих неоднородностей изомерна.

В рефрагирующей среде целесообразно использовать переменные [4, 5]

$$\xi = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \varphi, \quad (1)$$

где θ и φ — полярный и азимутальный углы рассеянных лучей. Тогда коэффициенты УЭФ представимы в виде

$$A_{\xi} = -\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dz}, \quad A_{\varphi} = B_{\xi\xi} = 0, \quad B_{\xi\xi} = B_{\varphi\varphi} = \frac{2D}{n_0^2} \operatorname{ch}^2 \xi.$$

Здесь $D = \sqrt{\pi} \bar{n}_1^2 / a$ — коэффициент диффузии лучей [6]; $n_0(z)$ — показатель преломления плоскослоистой среды, характеризующий регулярную рефракцию; $\bar{n}_1(x, y, z)$ — флуктуационная часть показателя преломления, причем $\bar{n}_1 = 0$ и

$$\sqrt{\bar{n}_1^2} \ll n_0. \quad (2)$$

Пологаем, что наличие пространственных неоднородностей не противоречит понятию регулярности плоскослоистой среды, т. е. горизон-

тальные градиенты отсутствуют. Условие (2) наряду с используемым ниже приближением малоуглового рассеяния обеспечивает возможность замены реального процесса рассеяния лучей процессом Маркова и применения УЭФ [1—3].

Уравнение Эйнштейна — Фоккера имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta} = \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dz} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{D}{n_0^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\text{ch}^2 \xi V) + \text{ch}^2 \xi \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right], \quad (3)$$

где $V(\xi, \varphi/\zeta) = QW(\xi, \varphi/\zeta)$ — вероятность состояния, характеризующая вероятность того, что луч, прошедший в рассеивающей среде путь ζ , имеет направление, определяемое координатами ξ и φ ; $Q = \text{ch}^{-2} \xi$ — якобиан преобразования.

Функция $V(\xi, \varphi/\zeta)$ является фундаментальным решением уравнения (3) с начальным условием

$$V(\xi, \varphi/\zeta = 0) = \delta(\xi - \xi_{00}) \delta(\varphi),$$

где $\xi_{00} = \ln \text{tg} \frac{\theta_{00}}{2}$, θ_{00} — угол падения волны на слой.

В малоугловом приближении рассмотрим случайные отклонения

$$\eta = \xi - \xi_0, \quad \psi = \varphi - \varphi_0 \quad (4)$$

от траектории, описываемой законом Снеллиуса

$$n_0 \sin \theta_0 = \text{sin} \theta_{00}, \quad \varphi_0 = 0. \quad (5)$$

Выполняя необходимые при функциональном преобразовании переменных (4) операции, учитывая (5) и используя методику [7], получим решение УЭФ $V_1(\eta, \psi/\zeta)$ в виде ряда по полиномам Эрмита $H_k(x)$

$$V_1(\eta, \psi/\zeta) \approx V_{10}(\eta, \psi/\zeta) \left[1 + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^n b_{nk}}{\sigma_{\eta}^{n-k} \sigma_{\psi}^k} H_{n-k} \left(\frac{\eta}{\sigma_{\eta}} \right) H_k \left(\frac{\psi}{\sigma_{\psi}} \right) \right], \quad (6)$$

где

$$V_{10}(\eta, \psi/\zeta) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\eta}\sigma_{\psi}} \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{2\sigma_{\eta}^2} - \frac{\psi^2}{2\sigma_{\psi}^2} \right\}. \quad (7)$$

Параметры, определяющие решение (6), имеют вид

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\psi}^2 \approx \frac{2}{\sin^2 \theta_{00}} \int_0^{\xi} D d\xi', \quad (8)$$

$$b_{30} = b_{32} \approx -\frac{2i}{\sin^2 \theta_{00}} \int_0^{\xi} D \sigma_{\eta}^2 \cos \theta_0 d\xi', \quad b_{31} = b_{33} = 0$$

и т. д., причем $b_{nk} \sim O[(n!)^{n-1}]$. Исследование сходимости ряда (6) затруднительно. Учитывая увеличение порядка малости коэффициентов b_{nk} с ростом индекса n , будем полагать, что решение УЭФ (6) сходится.

Выражения σ_{η}^2 , b_{30} и σ_{ψ}^2 , b_{32} описывают дисперсию и асимметрию рассматриваемого процесса по каждой из переменных соответственно.

Как обычно, возможность использования нулевого приближения (7) в качестве решения задачи определяется условием

$$\left| \frac{V_1(\eta, \psi/\zeta) - V_{10}(\eta, \psi/\zeta)}{V_{10}(\eta, \psi/\zeta)} \right| \ll 1. \quad (9)$$

При выполнении (9) индикатриса рассеяния лучей в плоскослоистой среде с изомерными неоднородностями, соответствующая сечению равной вероятности $V_{10}(\eta, \psi/\zeta) = \text{const}$, представляет собой окружность, заданную уравнением

$$\sigma_{\psi}^2 \eta^2 + \sigma_{\eta}^2 \psi^2 = \text{const}.$$

Для анализа решения (6) необходимо конкретизировать модель статистически неоднородной среды. Полагаем, что профиль регулярной составляющей электронной концентрации среды $N_0(z)$ изменяется либо по линейному, либо по параболическому закону. Кроме этого, рассмотрим две известные в литературе модели высотного хода флуктуаций электронной концентрации $N_1(r)$:

1. $\bar{N}_1^2 = \text{const}$. Интенсивность рассеивающих неоднородностей не зависит от высоты над поверхностью Земли. Для коэффициента диффузии лучей D справедливо представление

$$D = \bar{\epsilon}_1^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4n_0^2 a}, \quad (10)$$

где ϵ_1 — флуктуационная часть диэлектрической проницаемости среды, зависящая от частоты волны ω [8], причем $\bar{\epsilon}_1^2 = \text{const}$ при $\omega = \text{const}$.

2. $(\delta N)^2 = (\bar{N}_1/\bar{N}_0)^2 = \text{const}$. Интенсивность неоднородностей пропорциональна средней электронной концентрации. Наибольшие флуктуации наблюдаются в области отражения волны от слоя, которая играет основную роль в процессе рассеяния лучей в рефрагирующей среде. В этом случае

$$D = \frac{(\delta N)^2}{(N_0)^2} \frac{\sqrt{\pi} (1 - n_0^2)^2}{4n_0^2 a}. \quad (11)$$

Перейдем к непосредственному анализу полученного решения.

Линейный слой

Линейная аппроксимация регулярной составляющей электронной концентрации плоскослоистой среды $N_0(z) = az$ применима в случае, когда частота волны значительно меньше критической частоты слоя, т. е. точка отражения лежит вдали от максимума слоя. Показатель преломления имеет вид [8, 9]

$$n_0^2(z) = 1 - \frac{z}{z_0}, \quad (12)$$

где z_0 — полутолщина слоя. При выполнении (5) уравнение, описывающее траекторию лучей, можно записать в виде

$$z = -\frac{x^2}{4z_0 s_{00}^2} + x \text{ctg } \theta_{00},$$

причем координаты точки отражения определяются равенствами

$$z_{\text{отр}} = z_0 c_{00}^2, \quad x_{\text{отр}} = z_0 \sin 2\theta_{00},$$

где $c_{00} = \cos \theta_{00}$, $s_{00} = \sin \theta_{00}$.

Модель $\bar{N}_1^2 = \text{const}$. Подставляя (10), (12) в (8) и учитывая, что в приближении малоугловых флуктуаций $dz = d\zeta \cos \theta_0$, на выходе лучей из слоя после отражения получим [4, 7]

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\psi}^2 \approx 2\bar{\varepsilon}_1^2 \frac{z_0}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_{00}}{2} = \bar{\varepsilon}_1^2 \frac{z_0}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} I_1(\theta_{00}),$$

$$b_{30} = b_{32} \approx -i \frac{\sigma_{\eta}^4}{4} \left(\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_{00}}{2} \right)^{-2} \int_{-c_{00}}^{c_{00}} \frac{y \ln |y + \sqrt{y^2 + s_{00}^2}| dy}{y^2 + s_{00}^2} =$$

$$= -i \frac{\sigma_{\eta}^4}{4} K_1(\theta_{00}) \quad (13)$$

и т. д.

Для выполнения условия (9) полагаем достаточным, чтобы

$$\left| \frac{V_1(\eta, \psi/\xi) - V_{10}(\eta, \psi/\xi)}{V_{10}(\eta, \psi/\xi)} \right| \approx \left| i \frac{\eta}{\sigma_{\eta}} \left[\left(\frac{\eta^2}{\sigma_{\eta}^2} - 3 \right) \frac{b_{30}}{\sigma_{\eta}^3} + \left(\frac{\psi^2}{\sigma_{\psi}^2} - 1 \right) \frac{b_{32}}{\sigma_{\eta} \sigma_{\psi}^2} \right] \right| \ll 1. \quad (14)$$

Оценка неравенства (14) проводилась, как и в [4], на основании принципа «практической невозможности маловероятных событий», согласно которого

$$P(|u| < \beta \sigma_u) = \int_{-\beta \sigma_u}^{\beta \sigma_u} V_{10}(u) du = p_0, \quad u = \eta, \psi. \quad (15)$$

Трансцендентное уравнение (15) определяет $\beta = \beta(p_0)$. Для нормального закона распределения $V_{10}(u)$ при выборе вероятности осуществления события $p_0 = 0,95$ имеем $\beta \approx 2$. Подставляя (13) и $\beta = 2$ в левую часть неравенства (14) и учитывая, что при малых флуктуациях полярного угла $\chi = \theta - \theta_0 (\chi^2 \ll 1)$, на выходе из слоя справедливы соотношения

$$\eta = \ln \operatorname{tg} \frac{(\theta_{00} + \chi)}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_{00}}{2} \approx \frac{\chi}{s_{00}}, \quad \sigma_{\chi}^2 = s_{00}^2 \sigma_{\eta}^2,$$

где σ_{χ} — стандарт флуктуаций полярного угла, получим

$$2 |K_1(\theta_{00})| \frac{\sigma_{\chi}}{s_{00}} \ll 1. \quad (16)$$

Функция $K_1(\theta_{00})$ была просчитана на ЭВМ для углов падения θ_{00} вплоть до 1° . Подставляя максимальное значение этой функции в (16), получим, что на выходе лучей из линейного слоя выполнение усиленного на порядок неравенства (14) с вероятностью $p_0 = 0,95$ обеспечивается при углах падения

$$\theta_{00} \geq 5\sigma_{\chi}. \quad (17)$$

Согласно экспериментальным данным [10], стандарт флуктуаций полярного угла на выходе из ионосферы в зависимости от вариации ее параметров обычно лежит в пределах $\sigma_{\chi} \sim (0,5^\circ \div 2,5^\circ)$. Следовательно, нормальный закон распределения угловых флуктуаций (7) может быть использован в качестве решения задачи, если

$$\theta_{00} \geq 2,5^\circ \div 12,5^\circ.$$

Возможность применения предложенной статистической схемы ограничена условием (2). Вероятность нарушения этого неравенства максимальна в области отражения волны от слоя, где $n_0^2 = \sin^2 \theta_{00}$.

Полагая для слоя F_2 $\bar{\varepsilon}_1^2 \sim (10^{-5} \div 10^{-6})$, получим, что для выполнения (2) необходимо, чтобы

$$\theta_{00} \geq 3^\circ \div 10^\circ.$$

Таким образом, границы применимости нормального закона распределения угловых флуктуаций (7) и границы применимости используемого метода практически совпадают. Это справедливо не только на выходе лучей из рассеивающего линейного слоя, но и при их распространении в среде, включая область отражения, где оценка (14) приводит к условию более слабому, чем (17) [4].

Отметим, что для модели $\bar{N}_1^2 = \text{const}$, $\bar{\varepsilon}_1^2 \sim \omega^{-4}$, $z_0 \sim \omega^2$ [8, 9], т. е. при $\theta_{00} = \text{const}$ абсолютная величина дисперсии угловых флуктуаций (13) убывает при увеличении частоты волны ($\sigma^2 \sim \omega^{-2}$) за счет существенного уменьшения коэффициента диффузии лучей D (10).

Модель $(\delta N)^2 = \text{const}$. Коэффициент диффузии лучей D имеет вид (11). На выходе лучей из слоя имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 = \sigma_\psi^2 &\approx 2 (\overline{\delta N})^2 \frac{z_0}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \left\{ \left[c_{00}^2 + \frac{3}{8} s_{00}^4 \right] \ln \text{ctg} \frac{\theta_{00}}{2} - \frac{1}{8} c_{00} [2 + s_{00}^2] \right\} = \\ &= (\overline{\delta N})^2 \frac{z_0}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} I_2(\theta_{00}). \end{aligned} \quad (18)$$

Выражения для коэффициентов b_{30} и b_{32} не выписываем в силу их громоздкости. Проводя оценку границ применимости нулевого приближения (7), как и в предыдущем случае, в результате приходим к условию

$$\theta_{00} \geq 2\sigma_x, \quad (19)$$

которое при $\sigma_x \sim (0,5^\circ \div 2,5^\circ)$ переходит в

$$\theta_{00} \geq 1^\circ \div 5^\circ.$$

Условие (2), которое для рассматриваемой модели заведомо справедливо в начале слоя ($n_0 = 1$, $\bar{n}_1^2 = 0$) при учете $\delta N \sim (3 \div 10) 10^{-3}$ [9], накладывает на угол падения волны ограничение следующего вида

$$\theta_{00} \geq 1^\circ \div 3^\circ.$$

Условие (19) более слабое, чем аналогичное условие (17) для модели $\bar{N}_1^2 = \text{const}$. Оба условия (17) и (19) ограничивают минимальный угол падения волны на слой. Максимально возможный угол падения при учете кривизны ионосферы $\theta_{00 \text{ max}} \sim 75^\circ$ [9].

Для модели $(\delta N)^2 = \text{const}$ коэффициент диффузии лучей (11) явно не зависит от частоты. Следовательно, для этой модели в отличие от рассмотренной выше абсолютная величина дисперсии угловых флуктуаций волны (13) возрастает с увеличением частоты ($\sigma^2 \sim \omega^2$). При $\theta_{00} = \text{const}$ этот результат может быть объяснен увеличением высоты отражения волны от неоднородного слоя $z_{\text{отр}} = z_0 c_{00}^2$ ($z_0 \sim \omega^2$), т. е. увеличением расстояния, проходимого волной в рассеивающей среде.

В заключение проанализируем зависимость угловых флуктуаций волны (13), (19) на выходе из рассеивающего линейного слоя после отражения от угла падения θ_{00} . На рис. 1 приведены графики функций $I_1(\theta_{00})$ (сплошная линия) и $I_2(\theta_{00})$ (штрихпунктирная линия), характеризующих искомую зависимость для двух моделей высотного хода

флуктуаций электронной концентрации среды. Независимо от рассматриваемой модели абсолютная величина угловых флуктуаций убывает при увеличении угла падения θ_{00} . Можно указать две причины, приводящие к этому результату. Во-первых, уменьшение глубины проникновения волны внутрь слоя при фиксированной рабочей частоте, так как $z_{\text{отр}} = z_0 c_{00}^2$, то $z_{\text{отр}}^1 > z_{\text{отр}}^2$ при $\theta_{00}^1 < \theta_{00}^2$ ($\omega = \text{const}$). Во-вторых, при увеличении θ_{00} уменьшается влияние области отражения ($n_0^2 = \sin^2 \theta_{00}$), так как убывает относительная величина флуктуаций электронной концентрации среды, что приводит к уменьшению флуктуаций направления распространения волны.

Параболический слой

Параболическую аппроксимацию регулярной составляющей электронной концентрации плоскослойной среды [8, 9]

$$N_0(z) = N_m \left[2 \frac{z}{z_m} - \left(\frac{z}{z_m} \right)^2 \right] \quad (20)$$

обычно используют, когда частота волны ω близка к критической частоте слоя ω_k , т. е. отражение происходит вблизи максимума слоя. Здесь N_m — максимальная электронная концентрация, а z_m — полутолщина параболы. Показатель преломления среды, соответствующий (20), можно представить в виде

$$n_0^2(z) = 1 - 2 \left(\frac{c_{00}}{u} \right)^2 \frac{z}{z_m} + \left(\frac{c_{00}}{u} \right)^2 \left(\frac{z}{z_m} \right)^2, \quad (21)$$

где $u = \omega / \omega_{\text{кн}}$ — параметр, который при отражении волны от слоя не превышает единицы; $\omega_{\text{кн}} = \omega_k \sec \theta_{00}$ — критическая частота слоя при наклонном падении.

Следовательно, для параболического слоя все статистические характеристики угловых флуктуаций явным образом зависят от двух параметров: θ_{00} и u . Для модели $\bar{N}_1^2 = \text{const}$ коэффициент диффузии лучей (10) имеет вид

$$D = \bar{N}_{1m}^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4n_0^2 a} \left(\frac{c_{00}}{u} \right)^4, \quad (22)$$

где введено обозначение $N_{1m} = N_1 / N_m$, причем $N_{1m}^2 = \text{const}$.

Уравнение траектории лучей в параболическом слое, определяемое законом Снеллиуса (5), достаточно громоздко. Координаты точки отражения заданы соотношениями

$$z_{\text{отр}} = z_m [1 - \sqrt{1 - u^2}], \quad x_{\text{отр}} = uz_m \operatorname{tg} \theta_{00} \ln \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}. \quad (23)$$

Подставляя (22), (11) и (21) в (8), в зависимости от соотношения параметров u и c_{00} получим аналитические выражения дисперсии угловых флуктуаций волны на выходе лучей из рассеивающего параболического слоя после отражения для двух рассматриваемых моделей высотного хода флуктуаций электронной концентрации среды:

а) $0 < u < c_{00} < 1$, $\omega < \omega_k < \omega_{\text{кн}}$.

$$\sigma_1^2 \approx \bar{N}_{1m}^2 \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \frac{c_{00}^2}{u^2 \sqrt{1-u^2}} F(\varphi, q) = \bar{N}_{1m}^2 \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \Phi_1(u, \theta_{00}),$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &\approx \overline{(\delta N)^2} \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \left\{ \frac{3u^2 c_{00}^2 - s_{00}^2 (1-u^2)}{3\sqrt{1-u^2}} F(\varphi, q) + \right. \\ &+ \left. \frac{2\sqrt{1-u^2}(u^2 + u^2 c_{00}^2 + c_{00}^2)}{3u^2} E(\varphi, q) - \frac{c_{00}(2u^2 c_{00}^2 + 2u^2 + c_{00}^2)}{3u^2} \right\} = \\ &= \overline{(\delta N)^2} \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \Phi_2(u, \theta_{00}), \end{aligned}$$

$$\text{где } \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta_{00}, \quad q = \frac{1}{c_{00}} \sqrt{\frac{c_{00}^2 - u^2}{1-u^2}};$$

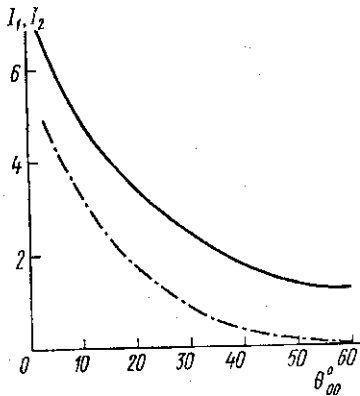


Рис. 1

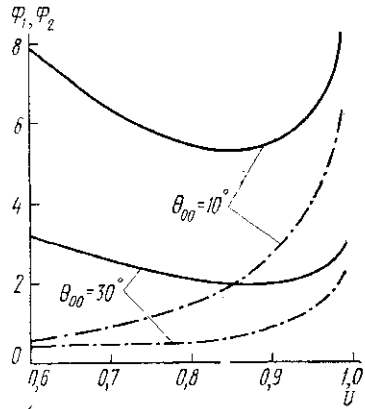


Рис. 2

б) $0 < u = c_{00} < 1$, $\omega = \omega_k < \omega_{кн}$.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &\approx \overline{N_{1m}^2} \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \frac{1}{s_{00}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{00} \right) = \overline{N_{1m}^2} \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \Phi_1(u), \quad (24) \\ \sigma_2^2 &\approx \overline{(\delta N)^2} \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \left\{ \frac{1}{s_{00}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{00} \right) - c_{00} \left(1 + \frac{2}{3} c_{00}^2 \right) \right\} = \\ &= \overline{(\delta N)^2} \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \Phi_2(u); \end{aligned}$$

в) $0 < c_{00} < u < 1$, $\omega_k < \omega < \omega_{кн}$.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &\approx \overline{N_{1m}^2} \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \frac{c_{00}^3}{u^3} \frac{1}{s_{00}} [K(q) - F(\varphi, q)] = \overline{N_{1m}^2} \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \Phi_1(u, \theta_{00}), \\ \sigma_2^2 &\approx \overline{(\delta N)^2} \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \left\{ \frac{c_{00} [3u^2 c_{00}^2 - s_{00}^2 (1-u^2)]}{3u s_{00}} [K(q) - F(\varphi, q)] + \right. \\ &+ \left. \frac{2s_{00}(u^2 + u^2 c_{00}^2 + c_{00}^2)}{3c_{00}u} [E(q) - E(\varphi, q)] - \frac{c_{00}(2u^2 c_{00}^2 + 2u^2 + c_{00}^2)}{3u^2} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{z_m}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{s_{00}^2} \Phi_2(u, \theta_{00}),$$

где $\varphi = \theta_{00}$, $q = \frac{\sqrt{u^2 - c_{00}^2}}{us_{00}}$.

Здесь $K(q)$ и $E(q)$ — полные, а $F(\varphi, q)$ и $E(\varphi, q)$ — неполные эллиптические интервалы первого и второго рода соответственно.

Отметим, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} F\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{00}, \frac{1}{c_{00}} \sqrt{\frac{c_{00}^2 - u_2}{1 - u_2}}\right) = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_{00}}{2},$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} E\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{00}, \frac{1}{c_{00}} \sqrt{\frac{c_{00}^2 - u^2}{1 - u^2}}\right) = \cos \theta_{00},$$

т. е. при достаточно малых значениях параметра u выражения (24) стремятся к соответствующим выражениям (13) и (19) при распространении волны в линейном слое.

В другом предельном случае, когда частота волны приближается к критической частоте слоя при наклонном падении, справедливо асимптотическое представление

$$K\left(\frac{\sqrt{u^2 - c_{00}^2}}{us_0}\right) \approx |\ln \delta\omega|, \quad \delta\omega = 1 - u = \frac{\Delta\omega}{\omega_{KH}}$$

где $\delta\omega$ — относительная расстройка частоты. Следовательно, дисперсия угловых флуктуаций волны на выходе из параболического изотропного слоя логарифмически возрастает независимо от рассматриваемой модели высотного хода флуктуаций электронной концентрации среды.

Ввиду математической сложности оценка условия (14) для параболического слоя не проводилась. Однако в силу предыдущего замечания следует ожидать, что при $u \rightarrow 1$ ограничение на минимальный угол падения волны θ_{00} усиливается вследствие возрастания стандарта флуктуаций полярного угла выхода лучей из слоя. Таким образом, вопрос о границах применимости выражений (24) при приближении частоты волны к критической частоте слоя при наклонном падении нуждается в дополнительном исследовании.

Проанализируем частотную зависимость дисперсии угловых флуктуаций волны на выходе из параболического изотропного слоя с изомерными неоднородностями (24). На рис. 2 приведены графики функций $\Phi_1(u)$ и $\Phi_2(u)$, характеризующих искомую зависимость для двух моделей высотного хода флуктуаций электронной концентрации среды на отрезке $u \in [0,6; 0,99]$ при фиксированных значениях угла падения волны на слой $\theta_{00} = 10, 30^\circ$.

Для модели $\bar{N}_1^2 = \text{const}$ функция $\Phi_1(u)$ (сплошная линия) плавно убывает с уменьшением параметра u и достигает минимума, положение которого при $\theta_{00} = \text{const}$ определяется решением трансцендентного уравнения. Характер зависимости функции $\Phi_1(u)$ при увеличении частоты обусловлен двумя противодействующими процессами: уменьшением коэффициента диффузии лучей (22) и увеличением высоты отражения волны от слоя (23), т. е. увеличением расстояния, проходимого волной в среде. При достаточно малых значениях u преобладает пер-

вый из этих процессов. Функция $\Phi_1(u)$ убывает, как и в случае модели линейного слоя. При приближении частоты волны к критической частоте слоя при наклонном падении основную роль начинает играть процесс, связанный с увеличением расстояния, проходимого волной в среде. Функция $\Phi_1(u)$ возрастает.

Для модели $(\delta N)^2 = \text{const}$ коэффициент диффузии лучей (11), как уже упоминалось, явно не зависит от частоты. Поэтому плавное возрастание функции $\Phi_2(u)$ при увеличении параметра u обусловлено увеличением высоты отражения волны от слоя (23). Следовательно, и в этом случае при малых значениях параметра u частотные зависимости угловых флуктуаций волны в параболическом и линейном слоях идентичны.

Если известно, какая из рассматриваемых моделей ($\bar{N}_1^2 = \text{const}$ или $(\delta \bar{N})^2 = \text{const}$) больше соответствует реальному ионосферному слою, а также известны регулярные параметры этого слоя, то анализ кривых на рис. 2 может быть использован для выбора оптимальных частот передачи информации с наименьшими потерями.

С другой стороны, качественное различие частотных зависимостей угловых флуктуаций волны на выходе из рассеивающего слоя для рассматриваемых моделей среды может служить критерием выбора той или иной модели флуктуаций электронной концентрации.

Экспериментальные данные о зависимости угловых флуктуаций волны от параметра u на одной и той же радиотрассе в литературе отсутствуют. В работе [11] исследована частотная зависимость амплитудных флуктуаций волны, а именно фактора возмущенности ионосферы. На основании сравнения теоретических расчетов с данными эксперимента в [11] сделано заключение о преимуществе модели $(\delta N)^2 = \text{const}$ для интерпретации экспериментальных результатов.

Увеличение угла падения волны θ_{00} на параболический рассеивающий слой при фиксированном значении параметра u , т. е. при постоянстве высоты отражения волны (23), приводит, как и в случае линейного слоя, к уменьшению величины дисперсии флуктуаций угла выхода лучей из слоя (рис. 2). Этот результат обусловлен уменьшением влияния области отражения (где $n_0^2 = \sin^2 \theta_{00}$) на флуктуационные характеристики волны.

Таким образом, в пределах применимости геометрической оптики в приближении малоуглового рассеяния статистика лучей в плоскостной изотропной среде с изомерными неоднородностями полностью определяется решением уравнения Эйнштейна — Фоккера (6). Для модели линейного слоя при выполнении условий (17) или (19) в качестве решения задачи можно использовать нормальный закон распределения угловых флуктуаций волны (7). Качественное различие частотных зависимостей угловых флуктуаций волны на выходе из рассеивающего слоя для двух моделей высотного хода флуктуаций электронной концентрации среды может служить критерием, какая из рассматриваемых моделей больше соответствует реальному ионосферному слою.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., 1961.
2. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1971, 14, № 5, 706.

3. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М., 1975.
4. Гусев В. Д. — «Радиотехника и электроника», 1973, 18, № 12, 2487.
5. Голынский С. М., Гусев В. Д. — «Радиотехника и электроника», 1976, 21, № 6, 1303.
6. Денисов Н. Г. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1958, 1, № 5—6, 34.
7. Голынский С. М., Гусев В. Д. — «Радиотехника и электроника», 1976, 21, № 3, 630.
8. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1967.
9. Альперт Я. Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. М., 1972.
10. Долуханов М. П. Распространение радиоволн. М., 1972.
11. Денисов Н. Г., Ерухимов Л. М. — «Геомagnetизм и астрономия», 1966, 6, № 4, 695.

Поступила в редакцию

4.3 77 г.

Кафедра

волновых процессов