УДК 537.525

В. А. Годяк
В. Н. Максимов

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Предлагается упрощенная модель положительного столба сильно неизотермической плазмы, в основе которой лежит предположение о дрейфе ионов в сильных полях, а инерция ионов формально учитывается ограничением скорости амбиполярного дрейфа на границах плазмы скоростью ионного звука. Это позволяет найти простые соотношения для частоты ионизации и граничной концентрации плазмы в зависимости от параметра подобия разряда. Показано, что область применимости упрощенной модели со стороны высоких давлений газа примыкает к области применимости теории Шоттки.

1. Теория положительного столба Шоттки содержит ряд допущений, делающих ее неприменимой в задачах газового разряда, где необходим учет структуры приграничной плазмы. Использование в теории Шоттки нулевых граничных условий ($n_k=0$) приводит к неограниченному росту скорости амбиполярного дрейфа и потенциала на границах плазмы.

Как было показано в [1], эту трудность можно устранить учетом в гидродинамических уравнениях инерции ионов, что приводит к конечному значению плотности плазмы на границах, когда скорость амбиполярного дрейфа достигает ионно-звуковой скорости — v_s (критерий Бома). Учет инерции ионов и критерия Бома позволил авторам [2] в рамках гидродинамической модели построить теорию положительного столба для широкого диапазона давлений нейтрального газа, совпадающую в пределе высоких давлений с теорией Шоттки, а в пределе низких — с теорией Ленгмюра — Тонкса.

Существенным недостатком теоретических моделей Шоттки и авторов [2] является предположение о независимости частоты ион-атомных столкновений от скорости амбиполярного дрейфа, что ограничивает применимость этих теорий сравнительно высокими давлениями, когда $\frac{T_e}{T_g}\frac{\lambda_i}{R}\ll 1$, [3]. Здесь T_e и T_g — температура электронов и газа, λ_i — средняя длина свободного пробега иона, а R — характерный размер плазмы.

Наиболее последовательное рассмотрение эффекта переменной подвижности ионов проведено в работе [4], где в рамках гидродинамической модели с учетом инерции ионов и критерия Бома найдено значение граничной концентрации плазмы

$$\delta_R=\frac{n_R}{n_0}\approx 0{,}6A^{1/2},\quad A=\frac{z}{z+\nu_0},$$

где z — частота прямой ионизации, ν_0 — частота ион-атомных столкновений в слабых полях.

Однако использование в качестве исходного параметра задачи [4] величины A, а не параметра подобия p_0R, (p_0 — приведенное давление газа) оставляет задачу незамкнутой и требует применения дополнительных итерационных методов для нахождения зависимостей A и z от p_0R.

2. В настоящей работе предлагается упрощенная модель положительного столба сильнонеизотермической плазмы ($T_e \gg T_g$), в основу которой положено предположение о дрейфе ионов в сильных полях, а в качестве граничного условия используется критерий Бома. Это позволяет получить простые аналитические зависимости для частоты ионизации и граничной концентрации от параметра подобия разряда.

В условиях газового разряда скорость амбиполярного дрейфа v лежит в пределах $0 < v < v_s$ и при не очень больших значениях p_0R существенно может превосходить тепловую скорость ионов для большей части положительного столба. Движение ионов при таких скоростях, как известно, определяется процессом резонансной перезарядки с сечением, практически не зависящим от скорости иона ($\lambda_i = \text{const}$, $v \sim E^{1/2}$).

В предположениях квазинейтральности плазмы, больцмановского распределения электронов и прямой ионизации исходными уравнениями задачи будут

$$\operatorname{div}(nv) = zn, \tag{1}$$

$$n = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right), \tag{2}$$

$$v = \left(\frac{2\lambda eE}{\pi M}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

По аналогии с работами [2, 4], где трение ионов определяется эффективной частотой столкновений, равной $\nu + z$, здесь λ — некая эффективная длина свободного пробега иона с учетом изменения импульса ионов вследствие ионизации и ухода на стенку. Качественно λ можно представить в виде

$$\lambda^{-1} = \lambda_i^{-1} + \lambda_z^{-1}, \tag{4}$$

где λ_i — истинная длина свободного пробега ионов, а λ_z — длина ионизации. В диффузионном пределе $\left(\frac{\lambda_i}{R} \ll 1\right)$ λ совпадает с λ_i, в противоположном ленгмюровском пределе $\left(\frac{\lambda_i}{R} \gg 1\right)$, $\lambda = \lambda_z \approx \frac{v_s}{z}$ — величина порядка R.

В силу симметрии задачи

$$\varphi(0) = E(0) = 0. \tag{5}$$

В качестве граничного условия, в соответствии с [1], примем критерий Бома

$$v_R = v_s = \left(\frac{kT_e}{M}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Вводя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{d}; \quad \delta = \frac{n}{n_0}; \quad \eta = -\frac{e\varphi}{kT_e},$$

для плоского слоя плазмы толщиной $2d$ из [1 — 3] получаем

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}-2\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2=2\alpha\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^{1/2},\quad \eta=-\ln\delta; \tag{7}$$

$$\alpha=\frac{zd}{v_s}\left(\frac{\pi d}{2\lambda}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Интегрирование системы (7) с граничными условиями (5) и (6) дает пространственное распределение плазмы $\delta(\xi)$ и уравнение для параметра α

$$\alpha^{2/3}\xi=\frac{1}{2}\ln\left[(1-\delta^3)^{1/3}+\delta\right]+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2(\delta^3-1)^{1/3}-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \tag{9}$$

$$\alpha^{2/3}=(bS)^{2/3}=\frac{1}{6}\ln\frac{(b^{2/3}+S^{1/3})^3}{b^2+S}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2b^{2/3}-S^{1/3}}{\sqrt{3}\,S^{1/3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \tag{10}$$

где

$$b=\left(\frac{\pi d}{2\lambda}\right)^{1/2};\quad S=\frac{zd}{v_S}.$$

Из уравнения (10) следует, что при $\lambda/d=0$, α принимает предельное значение $\alpha_0=\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)^{3/2}=1{,}33$. Следствием же уравнения (9) является универсальная зависимость δ от $\alpha^{2/3}\xi$, независимо от параметра λ/d, последний лишь определяет положение границы плазмы посредством параметра α. Зависимости α от λ/d и распределение плотности плазмы δ от обобщенной координаты $\alpha^{2/3}\xi$, следующие из уравнений (9) и (10), представлены на рис. 1.

Значения частоты ионизации и граничной концентрации, следующие из уравнений (9) и (10), имеют вид

$$z=\frac{v_s}{d}\alpha\left(\frac{2\lambda}{\pi d}\right)^{1/2},\quad \delta_d=\left[1+\frac{\pi}{2}\frac{v_s}{\lambda z}\right]^{-1/3}.$$

В силу слабой зависимости α от λ/d, принимая среднее значение $\bar{\alpha}=1{,}25$, для z и δ_d получаем

$$z=\frac{v_s}{d}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{1/2},\quad \delta_d=\left[1+\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^{3/2}\right]^{-1/3}. \tag{11}$$

В диффузионном пределе, $\lambda_i/d\ll 1$, $\lambda=\lambda_i$,

$$\delta_d=0{,}86\left(\frac{\lambda_i}{d}\right)^{1/2}.$$

Экстраполяция решений (11) к ленгмюровскому пределу $\left(\frac{i\lambda}{d}\gg 1,\ \lambda=\lambda_z\right)$ позволяет получить интерполяционные формулы для широкого диапазона давлений. Для этого «сошьем» выражение (11) для z со значением z из теории Ленгмюра — Тонкса

$$\frac{v_s}{d}\left(\frac{\lambda_z}{d}\right)^{1/2}=S_0\frac{v_s}{d},\quad S_0=0{,}572,$$

откуда с учетом (4) следует

$$\frac{\lambda_z}{d} = S_0^2 = \frac{1}{3}; \quad \frac{d}{\lambda} = 3 + \frac{d}{\lambda_i}.$$

Тогда для z и δ_d окончательно получаем интерполяционные формулы для плоской задачи

$$z = \frac{v_s}{d}\left(3 + \frac{d}{\lambda_i}\right)^{-1/2}, \quad \delta_d = 0{,}86\left(3 + \frac{d}{\lambda_i}\right)^{-1/2}. \qquad (12)$$

В ленгмюровском пределе из (12) следует $\delta_d = 0{,}50$, в то время как из теории Ленгмюра — Тонкса $\delta_d = 0{,}43$.

3. Рассмотрим аналогичную задачу для цилиндра с радиусом R. В этом случае система уравнений (1)—(3) дает для безразмерного потенциала

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 2\left[\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 - \frac{1}{\xi}\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^{1/2}\right], \qquad (13)$$

здесь

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \alpha = \frac{zR}{v_s}\left(\frac{\pi R}{2\lambda}\right)^{1/2}.$$

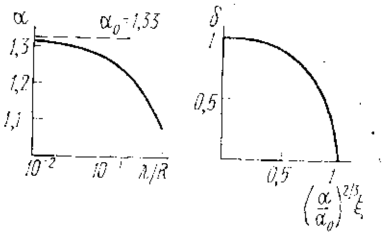

Рис. 1. Зависимость α от λ/d и профиль плотности δ для плоского слоя плазмы

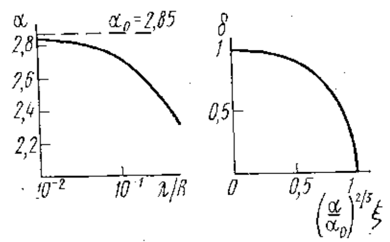

Рис. 2. Зависимость α от λ/R и профиль плотности δ для плазменного цилиндра

Найденные с помощью ЭВМ зависимость α от λ/R и универсальный профиль плотности плазмы даны на рис. 2. Предельное значение $\alpha_0 = 2{,}85$, а граничная концентрация плазмы с точностью не хуже 1% описывается формулой

$$\delta_R = \left[1 + \left(\frac{\pi R}{2\lambda}\right)^{3/2}\right]^{-1/3}.$$

Повторяя процедуру, проведенную для плоского случая ($\bar{\alpha} = 2{,}76$; $S_0 = 1{,}11$), получаем формулы для цилиндрической задачи

$$z = 2{,}2\frac{v_s}{R}\left(\frac{R}{\lambda_i} + 4\right)^{-1/2}, \quad \delta_R = 0{,}8\left(\frac{R}{\lambda_i} + 4\right)^{-1/2}. \qquad (14)$$

В ленгмюровском пределе $\delta_R = 0{,}40$, а из теории Ленгмюра — Тонкса $\delta_R = 0{,}32$. В диффузионном пределе

$$z = 2{,}2\frac{v_s}{R}\left(\frac{\lambda_i}{R}\right)^{1/2}, \quad \delta_R = 0{,}8\left(\frac{\lambda_i}{R}\right)^{1/2}. \qquad (15)$$

Отметим две особенности зависимости величины $S = \frac{zR}{v_s}$ от параметра подобия p_0R в диффузионном пределе. Первая состоит в том, что, в отличие от модели Шоттки, где $S=(2{,}4)^2\frac{v_s}{\nu_0 R}\sim(p_0R)^{-1}$, в рассматриваемой модели $S\sim(p_0R)^{-1/2}$. Вторая — это независимость S от температуры газа, в то время как теория Шоттки $S\sim\nu_0^{-1}\sim T_g^{-1/2}$.

4. На рис. 3 представлены зависимости S от $\frac{\lambda_i}{R}\sim(p_0R)^{-1}$, следующие из формулы (14), и S_1 — из теории Шоттки, там же даны результаты численного счета по данным работы [4]. Из рис. 3 видно, что для низких давлений, где $\frac{T_e}{T_g}\frac{\lambda_i}{R}>1$, имеется хорошее согласие

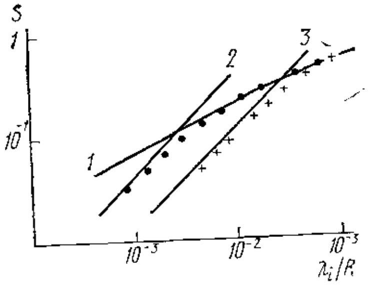

Рис. 3. Зависимость S от λ_i/R. 1 — по формуле (14), 2 — S_1 для $T_e/T_g=300$, 3 — S_1 для $T_e/T_g=30$; ● и × — результаты численного счета по данным работы [4] соответственно для $T_e/T_g=300$ и $T_e/T_g=30$

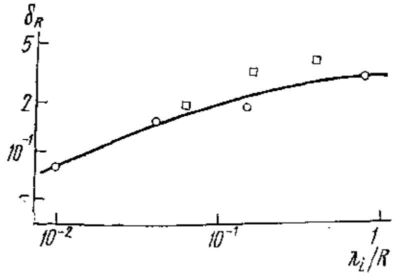

Рис. 4. Зависимость δ_R от λ_i/R: ——— по формуле (14), □ — по экспериментальным данным [5], ○ — по экспериментальным данным [6]

формулы (14) с результатами численного счета. В то же время для $\frac{T_e}{T_g}\frac{\lambda_i}{R}<1$ численный счет практически совпадает с теорией Шоттки. В области $\frac{T_e}{T_g}\frac{\lambda_i}{R}\approx 1$ значения S и S_1 отличаются от результатов численного счета не более 20÷30%.

На рис. 4 представлена зависимость δ_R от λ_i/R и значения δ_R, полученные из экспериментальных данных [5, 6] плотности ионного тока на стенку I_i по формуле

$$\delta_R=\frac{I_i}{en_0v_s}.$$

При вычислении λ_i использовались значения сечения резонансной перезарядки ионов ртути при энергии, равной 1 эВ, $q=1{,}5\cdot10^{-14}$ см².

Видно хорошее согласие результатов как в диффузионной области, где экспериментальные значения $\delta_R\sim(\lambda_i/R)^{1/2}$, так и в режиме свободного пробега.

Таким образом, рассмотренная здесь упрощенная модель положительного столба сильнонеизотермической плазмы дополняет модель Шоттки со стороны низких давлений, граница применимости двух моделей определяется условием $\frac{T_e}{T_g}\frac{\lambda_i}{R}\approx 1$.

В заключение заметим, что при $\frac{T_e}{T_g}\frac{\lambda_i}{R}<1$ значение δ_R можно просто получить из диффузионного уравнения Шоттки с использованием в качестве граничного условия критерия Бома $-\delta_R = 1{,}25\ \frac{v_s}{v_0 R}$. Этот же результат следует из более точного рассмотрения [2, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Person K. B. — «Phys. Fluids», 1962, **5**, 1625.
2. Self S. A., Ewald H. N. — «Phys. Fluids», 1966, **9**, 2486.
3. Захарова В. М., Каган Ю. М., Перель В. И. — «Изв. АН СССР. Физ.», 1959, **23**, 999.
4. Cervenan L., Martisovits V. — «Czech. J. Phys.», 1976, **B26**, 507.
5. Грановский В. Л. — ДАН, 1939, 23, 880.
6. Клярфельд Б. Н. — «Труды ВЭИ», 1940, **41**, 165.

Поступила в редакцию
22.3 1977 г.
Кафедра
электроники