

УДК 535.12

В. А. Давыдов

О ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ  
«ЧЕРЕНКОВСКОГО» ЗАРЯДА  
В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

При пренебрежении дисперсией получены точные выражения для полей излучения «черенковского» заряда в случае мгновенного скачка во времени диэлектрической проницаемости.

В. Л. Гинзбург [1] показал, что равномерно движущийся заряд должен излучать при изменении электромагнитных свойств среды во времени. Им был рассмотрен случай скачкообразного изменения во времени диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Более подробное рассмотрение этого явления было дано В. Л. Гинзбургом и В. Н. Цытовичем [2]. Впоследствии было показано [3], что излучение, возникающее при скачке диэлектрической проницаемости, может быть рассчитано, если учесть, что каждая гармоника Фурье поля заряда в случае этого скачка расщепляется на две гармоники с определенными амплитудами и частотой. Аналогичный подход применен и в настоящей работе для случая заряда, движущегося со скоростью большей фазовой скорости света в среде до скачка.

Как было показано Моргенталлером [4], плоская электромагнитная волна вида

$$E = E_0 e^{i(kr - \omega_1 t)} \quad (1)$$

при скачкообразном изменении во времени диэлектрической проницаемости от  $\epsilon_1$  до  $\epsilon_2$  расщепляется на две волны, одна из которых идет вперед, а другая — назад с амплитудами

$$\frac{1}{2} E_0 \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right), \quad \frac{1}{2} E_0 \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right) \quad (2)$$

и с частотой

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \omega_1. \quad (3)$$

Волновой же вектор  $k$  не меняется.

Для нас однако необходимо будет найти, как расщепляются при скачке  $\epsilon$  компоненты Фурье векторного и скалярного потенциалов  $A$  и  $\phi$ , частота  $\omega$  и волновой вектор  $k$  которых не связаны дисперсионным уравнением и, следовательно, независимы. Пусть до скачка диэлектрической проницаемости компоненты Фурье векторного и скалярного потенциалов описывались выражениями

$$A_{k\omega}^0 e^{i(kr - \omega_1 t)} \quad \text{и} \quad \phi_{k\omega}^0 e^{i(kr - \omega_1 t)}, \quad (4)$$

а после скачка, соответственно,

$$A_{k\omega}^1 e^{i(kr - \omega_2 t)} + A_{k\omega}^2 e^{i(kr + \omega_2 t)}$$

и

$$\Phi_{k\omega}^1 e^{i(kr - \omega_2 t)} + \Phi_{k\omega}^2 e^{i(kr + \omega_2 t)}. \quad (5)$$

Искомые амплитуды  $A_{k\omega}^{1,2}$  и  $\Phi_{k\omega}^{1,2}$  могут быть найдены из условия непрерывности магнитной и электрической индукций в момент времени  $t=0$ , когда происходит скачок диэлектрической проницаемости. Иными словами, выражения  $\text{rot } \mathbf{A}$  и  $-\frac{1}{c} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \varepsilon \text{grad } \varphi$  должны быть непрерывны в момент скачка. Мы можем удовлетворить вышеуказанным требованиям, если будем искать такие  $A_{k\omega}^{1,2}$  и  $\Phi_{k\omega}^{1,2}$ , при которых выражения

$$\text{rot } \mathbf{A}, \quad \varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\varepsilon \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

должны быть непрерывны в момент скачка. Четыре условия (6) определяют четыре неизвестные амплитуды компонентов Фурье векторного и скалярного потенциалов. Решая систему (6) и используя (5), получим

$$A_{k\omega}^{1,2} = \frac{1}{2} A_{k\omega}^0 \left( 1 \pm \frac{\varepsilon_1 \omega_1}{\varepsilon_2 \omega_2} \right), \quad (7)$$

$$\Phi_{k\omega}^{1,2} = \frac{1}{2} \Phi_{k\omega}^0 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \pm \frac{\varepsilon_1 \omega_1}{\varepsilon_2 \omega_2} \right),$$

$\omega_2$  — неопределенная величина, она определяется при интегрировании. В (7) знак плюс относится к

$A_{k\omega}^1$  и к  $\Phi_{k\omega}^1$ , а знак минус — к  $A_{k\omega}^2$  и к  $\Phi_{k\omega}^2$ .

Равномерное движение «черенковского» заряда можно представить себе следующим образом. Пусть заряд  $q$  движется равномерно со скоростью  $v > c/\sqrt{\varepsilon_1}$  и резко останавливается в момент скачка диэлектрической проницаемости. Затем, сразу же после скачка, заряд мгновенно ускоряется и движется далее в среде с  $\varepsilon_2$  с той же скоростью  $v$ . Очевидно, что излучение после скачка состоит из двух слагаемых. Первое связано с полубесконечным движением в среде с  $\varepsilon_1$ . В момент скачка это излучение, согласно формулам (7), трансформируется. Второе слагаемое дает излучение, связанное с полубесконечным движением заряда после скачка в среде с  $\varepsilon_2$ .

Найдем поля, возникшие при остановке и старте заряда в момент  $t=0$ . Для определенности будем считать, что заряд движется вдоль оси  $z$  и в момент  $t=0$  находится в начале координат. Приведем вычисления для вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ , так как вычисления для  $\varphi$  аналогичны. Решение уравнений Максвелла для компонентов Фурье вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$A_{k\omega_1} = \frac{4\pi qv}{(2\pi)^3 c} \cdot \frac{\delta^\mp(\omega_1 - kv)}{\left( k^2 - \frac{\varepsilon_{1,2} \omega_1^2}{c^2} \right)}; \quad (8)$$

здесь знак минус и  $\varepsilon_1$  соответствуют случаю остановки заряда, а знак плюс и  $\varepsilon_2$  — случаю старта;

$$\delta^\pm(x) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{x \mp i\gamma} \quad (\gamma > 0). \quad (9)$$

Используя (7); (8), (9), получим следующее выражение для компонента Фурье  $A_k$  вектор-потенциала после скачка:

$$A_k = i \frac{4\pi qv}{c(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_1 \omega_1}{\varepsilon_2 \omega_2} \right) \frac{e^{-i\omega_2 t}}{(\omega_1 - kv - i\gamma) \left( k^2 - \frac{\varepsilon_1 \omega_1^2}{c^2} \right)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_1 \omega_1}{\varepsilon_2 \omega_2} \right) \frac{e^{+i\omega_2 t}}{(\omega_1 - kv - i\gamma) \left( k^2 - \frac{\varepsilon_1 \omega_1^2}{c^2} \right)} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-i\omega_1 t}}{(\omega_1 - kv + i\gamma) \left( k^2 - \frac{\varepsilon_2 \omega_1^2}{c^2} \right)} \right]. \quad (10)$$

Рассмотрим сначала два первых слагаемых в формуле (10), которые соответствуют полю остановки заряда, преобразованному на скачке диэлектрической проницаемости. Обозначим их через  $A_k^-$ . При интегрировании выражения (10) по частоте  $\omega_1$  кроме полюса  $\omega_1 = kv + i\gamma$  имеются еще полюса  $\omega_1 = \pm \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ . Эти последние мы будем при интегрировании обходить сверху в соответствии с требованием, чтобы поле излучения, связанное с остановкой заряда, обращалось в ноль при  $t < 0$ . Проинтегрировав два первых слагаемых в формуле (10) по частоте  $\omega_1$ , получим (выбирая в качестве решения при  $t > 0$  свободную волну  $\omega_2 = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2}}$ ):

$$A_k^- = \frac{qv}{\sqrt{\varepsilon_1} 8\pi^2} \left[ \left( 1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right) \left( \frac{e^{-i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2}} t}}{k \left( \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_1}} - kv - i\gamma \right)} + \frac{e^{+i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2}} t}}{k \left( \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_1}} + kv + i\gamma \right)} \right) + \right. \\ \left. + \left( 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right) \left( \frac{e^{-i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2}} t}}{k \left( \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_1}} + kv + i\gamma \right)} + \frac{e^{+i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2}} t}}{k \left( \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_1}} - kv - i\gamma \right)} \right) \right]. \quad (11)$$

Для получения явной зависимости вектор-потенциала  $A^-$  от координат необходимо проинтегрировать выражение (11) по волновому вектору  $k$ :

$$A^-(r, t) = \int d^3k A_k^- e^{ikr}. \quad (12)$$

Рассмотрим интеграл от первого слагаемого в формуле (11), интегрирование второго аналогично. Обозначим его через  $A^-$ . Используя (12) и перейдя к сферическим координатам в  $k$ -пространстве, получим, проинтегрировав по азимутальному углу  $\phi$ :

$$A_1^- = \frac{qv}{\sqrt{\epsilon_1} 4\pi} \left( 1 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} dk \cos \theta J_0(k\rho \cos \theta) \times \\ \times \left( \frac{e^{ik \left( z \sin \theta - \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \right)}}{\left( \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} - v \sin \theta - i\gamma \right)} + \frac{e^{ik \left( z \sin \theta + \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \right)}}{\left( \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} + v \sin \theta + i\gamma \right)} \right). \quad (13)$$

Здесь  $\rho$  — расстояние от оси  $z$  (линии движения заряда) до точки наблюдения. Взяв действительную часть от (13), проинтегрируем это выражение по  $k$ . Получим

$$\int_0^{\infty} J_0(k\rho \cos \theta) \cos \left[ k \left( z \sin \theta \mp \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \right) \right] dk = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho \cos \theta < \left| \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \mp z \sin \theta \right| \\ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta - \left( \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \mp z \sin \theta \right)^2}}, & \text{если } \rho \cos \theta > \left| \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \mp z \sin \theta \right|. \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрение выражения (14) показывает, что  $A_1^- = 0$ , если  $\rho^2 + z^2 < \left( \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \right)^2$ . Таким образом,  $A_1^-$  обращается в ноль внутри сферы радиуса  $\frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}}$  с центром в точке  $z=0$ . Вследствие того что вектор-потенциал  $A_1^-$  отличен от нуля лишь при условии

$$\rho \cos \theta > \left| \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \mp z \sin \theta \right|, \quad (15)$$

интервал интегрирования в (13) будет отличен от  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Новые пределы интегрирования найдем, решая неравенство (15).

Сделав в (13) замену переменных  $\sin \theta = x$ , получим, используя (14) и (15):

$$A_1^- = \frac{qv}{4\pi c} \left( 1 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right) \left[ \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(1 - \beta \sqrt{\epsilon_1} x - i\gamma) \sqrt{\rho^2 (1 - x^2) - \left( \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} - zx \right)^2}} + \right. \\ \left. + \int_{x_3}^{x_4} \frac{dx}{(1 + \beta \sqrt{\epsilon_1} x + i\gamma) \sqrt{\rho^2 (1 - x^2) - \left( \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} + zx \right)^2}} \right], \quad (16)$$

где

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad x_{1,2} = \frac{\frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} z \mp \rho \sqrt{\rho^2 + z^2 - \left( \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \right)^2}}{\rho^2 + z^2},$$

$$x_{3,4} = \frac{-\frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} z \mp \rho \sqrt{\rho^2 + z^2 - \left( \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \right)^2}}{\rho^2 + z^2}$$

здесь знак минус соответствует  $x_1$  и  $x_3$ , а знак плюс —  $x_2$  и  $x_4$ .

Интегрируя (16) по  $x$ , с учетом бесконечно малого смещения от действительной оси полюсов подынтегрального выражения, получим, что вектор-потенциал  $A_1^-$  отличен от нуля лишь в области, ограниченной частью конуса  $\gamma_1 \rho = v \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} t - z$  и сферой радиуса  $\frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}}$  и равен

$$A_1^- = \begin{cases} \frac{qv}{c} \left( 1 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right) / \sqrt{\left( v \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} t - z \right)^2 - \gamma_1^2 \rho^2} \\ \text{при } \rho^2 + z^2 > \left( \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \right)^2, \rho < \frac{v \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} t - z}{\gamma_1}, z < \frac{c^2 t}{v \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}; \\ 0 - \text{во всем остальном пространстве;} \\ \gamma_1^2 = \beta^2 \epsilon_1 - 1. \end{cases} \quad (17)$$

Аналогично можно проинтегрировать и второе слагаемое в формуле (11). Окончательный результат таков:

$$A^-(r, t) = A_1^- + A_2^- + A_3^-, \quad (18)$$

где  $A_1^-$  задается формулой (17),

$$A_2^- = \begin{cases} \frac{qv}{c} \left( 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right) / \sqrt{\left( v \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} t + z \right)^2 - \gamma_1^2 \rho^2} \\ \text{при } \rho < \frac{-v \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} t - z}{\gamma_1}; \\ 0 - \text{во всем остальном пространстве,} \end{cases} \quad (19)$$

$$A_3^- = \begin{cases} -\frac{qv}{c} \left( 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right) / \sqrt{\left( v \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} t + z \right)^2 - \gamma_1^2 \rho^2} \\ \text{при } \rho^2 + z^2 > \left( \frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}} \right)^2, \rho < \frac{v \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} t + z}{\gamma_1}, z < -\frac{c^2 t}{v \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}; \\ 0 - \text{во всем остальном пространстве.} \end{cases} \quad (20)$$

Поверхность, внутри которой вектор-потенциал  $A_1^-$  отличен от нуля, представляет собой «остатки» того черенковского конуса, который «тянулся» за зарядом до скачка диэлектрической проницаемости. Если продолжить образующую конуса до пересечения с осью  $z$ , то точка пересечения (воображаемая вершина конуса) будет двигаться со скоростью  $v \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$ , благодаря тому что угол наклона образующей конуса

к оси  $z$  не изменился, а скорость света в среде изменилась в  $\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$  раз. Выражения (19), (20) для  $A_2^-$  и  $A_3^-$  представляют собой вектор-

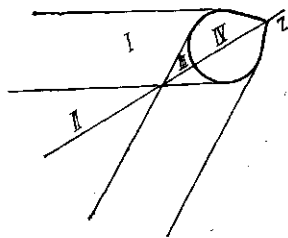
потенциал поля «черенковского» заряда, которое «отразилось» от скачка диэлектрической проницаемости. Последнее слагаемое в формуле (10) описывает вектор-потенциал стартующего заряда. Если  $v < \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}}$ , т. е. заряд после скачка не является «черенковским», то внутри сферы радиуса  $\frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}}$  с центром в точке  $z=0$  установится поле равномерно движущегося заряда [5]:

$$A^+ = \begin{cases} \frac{qv}{c} / \sqrt{(vt-z)^2 + (1-\epsilon_2\beta^2)\rho^2} & \text{при } \rho^2 + z^2 < \left(\frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}}\right)^2; \\ 0 & \text{при } \rho^2 + z^2 > \left(\frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}}\right)^2. \end{cases} \quad (21)$$

Если же  $v > c/\sqrt{\epsilon_2}$ , то последнее слагаемое в (10) описывает поле стартующего «черенковского» заряда [6]

$$A^+ = \begin{cases} \frac{2qv}{c} / \sqrt{(vt-z)^2 - \gamma_2^2 \rho^2} & \text{при } \rho^2 + z^2 < \left(\frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}}\right)^2, \\ \text{а также при } \rho^2 + z^2 > \left(\frac{ct}{\sqrt{\epsilon_2}}\right)^2, \rho < \frac{vt-z}{\gamma_2}, \\ z > \frac{c^2 t}{v^2}; \\ 0 & \text{— во всем остальном пространстве;} \\ \gamma_2^2 = \beta^2 \epsilon_2 - 1. \end{cases} \quad (22)$$

На рисунке изображено сечение плоскостью, проходящей через ось  $z$  областей, где вектор-потенциал отличен от нуля. Изображенная картина соответствует частному случаю  $\epsilon_1=9, \epsilon_2=4, v=2/3 c$ . В области I (см. выражение (17)) отличен от нуля вектор-потенциал  $A_1^-$ . В области II и в области III отличны от нуля  $A_2^-$  и  $A_3^-$  (см. выражения (19) и (20)). Разумеется, поскольку области II и III лежат внутри области I, то в них  $A_1^-$  также отличен от нуля. В области IV не равен нулю вектор-потенциал  $A^+$  (см. (22)) стартующего «черенковского» заряда.



Автор благодарит Б. М. Болотовского, В. Е. Рока и С. Н. Столярова за советы и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1973, 16, 4.
2. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. — ЖЭТФ, 1973, 65, 132.
3. Давыдов В. А. Краткие сообщения по физике. — ФИАН, 1976, № 4, 3.
4. Morgenthaler F. R. — IRE TRANS, 1958, MTT-6, 167.
5. Парселл Э. Электричество и магнетизм. М., 1971, с. 173—177.
6. Давыдов В. А., Рок В. Е. VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (тезисы докладов), т. 3. М., стр. 333.

Поступила в редакцию  
4.5 1977 г.  
Кафедра  
квантовой теории