УДК 539.12; 530.145

Ю. Г. Павленко

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В СПИНОРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В работе получены уравнения движения частиц во внешнем поле на основе дираковского лагранжиана и найдено релятивистское выражение для пропагатора Глаубера.

При движении частиц во внешних полях проявляются три типа квантовомеханических эффектов: первый связан с квантованием самого движения, второй с поведением спина и третий с отдачей частицы при излучении [1]. Однако, если частица локализована так, что неопределенности импульса и координаты существенно меньше импульса и размеров области движения, то в слабонеоднородных полях с напряженностями меньше критической возможно квазиклассическое описание движения. Обычно переход к классике совершают в уравнениях поля.

В настоящей работе рассмотрен ряд аспектов квазиклассического описания взаимодействия дираковских частиц с внешним полем в лагранжевом формализме. Случай нерелятивистских скалярных частиц обсуждался в работе [2].

1. Уравнение движения. Плотность лагранжиана свободного фермионного поля [3]

$$L = \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\hbar\,\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(-i\hbar\,\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi})\psi -$$

$$-\frac{\mu'}{2e}\partial_\mu(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi) + \frac{d'}{2e}\partial_\mu(\bar{\psi}^*\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}^*\sigma^{\mu\nu}\psi).$$

Здесь μ', d' — аномальные магнитный и электрический моменты фермиона, ${}^*\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}e^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}$ — матрица дуальная матрице $\sigma_{\alpha\beta}$. Два последних слагаемых имеют вид 4-дивергенции и не дают вклада в уравнения поля. Теперь введем минимальное взаимодействие с электромагнитным полем, заменяя обычные производные калибровочно-инвариантными

$$i\partial_\mu\psi \to \pi_\mu\psi = (i\partial_\mu - eA_\mu)\psi -$$

$$-i\partial_\mu\bar{\psi} \to \bar{\pi}_\mu\bar{\psi} = (-i\partial_\mu - eA_\mu)\bar{\psi}.$$

Тогда лагранжиан приобретает вид [4]

$$L = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma^\mu\pi_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(\bar{\pi}_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi})\psi -$$

$$-i\frac{\mu'}{2}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi - i\frac{d'}{2}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu}\psi. \quad (1)$$

В дальнейшем положим $d'=0$. Величину μ' обычно записывают в виде $\mu'=a\mu_0$, $\mu_0=\frac{e\hbar}{2mc}$, $a=\frac{g-2}{2}$, где g — фактор Ланде.

При переходе к классическому описанию по спиновым переменным должно быть проведено усреднение. Поэтому, полагая

$$\psi=ae^{i\frac{S}{\hbar}}\frac{u}{\sqrt{2p_0}}, \tag{2}$$

где u — биспинор, мы фактически в лагранжиане (1) переходим к двум новым переменным a^2 и S.

При вычислении средних значений по спиновым переменным некоторого оператора Λ удобно использовать соотношение

$$\bar{u}\Lambda u=Sp\frac{1}{2}(\hat{p}+m)(1-\gamma^5\hat{a})\Lambda, \tag{3}$$

$$p_\mu=-\partial_\mu S-eA_\mu.$$

Здесь a_μ — среднее значение оператора спина [5]

$$T^\mu=\gamma^5\gamma^\mu-\gamma^5\frac{\pi^\mu}{m}. \tag{4}$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая значения

$$\bar{u}\gamma^\mu u=2p^\mu,\quad \bar{u}u=2m,$$

$$\bar{u}\sigma^{\mu\nu}u=2ie^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha a_\beta,$$

найдем

$$L=\frac{a^2}{p_0}[(\partial_\mu S+eA_\mu)(\partial^\mu S+eA^\mu)-m^2-\mu'\,{}^*F^{\mu\nu}(\partial_\mu S+eA_\mu)a_\nu], \tag{5}$$

где ${}^*F^{\mu\nu}=1/2\,e^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Последнее слагаемое в (5), описывающее влияние спина на движение, того же порядка $\hbar$, что и квантовые поправки к движению. Поэтому в полях с напряженностями меньше критических

$$\chi=\frac{e\hbar}{m^3c^4}\sqrt{(F^{\mu\nu}p_\nu)^2}\ll 1,$$

и им можно пренебречь. Уравнения Лагранжа — Эйлера в переменных a^2, S имеют вид

$$\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu S}=\frac{\partial L}{\partial S}, \tag{6а}$$

$$\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu a^2}=\frac{\partial L}{\partial a^2}. \tag{6б}$$

Уравнение (6а) совпадает с уравнением непрерывности для плотности вероятности

$$\partial_\mu a^2(\partial^\mu S+eA^\mu)=0,$$

а уравнение (6б) является уравнением Гамильтона—Якоби.

$$(\partial_\mu S+eA_\mu)(\partial^\mu S+eA^\mu)-m^2=0. \tag{7}$$

Уравнение (7) в частных производных можно заметить уравнениями характеристик. Для этого рассмотрим полный интеграл $S=S(x,\alpha)$, зависящий от четырех постоянных α_μ. x_μ определяется обычным образом: $x_0^\mu = \partial S/\partial\alpha_\mu$. Учитывая, что кинетический импульс $m\dot{x}_\mu = -\partial_\mu S - eA_\mu$, возьмем 4-градиент обеих частей (7):

$$\dot{x}^\nu\partial_\mu(-\partial_\nu S - eA_\nu) = -\dot{x}^\nu\partial^2_{\mu\nu}S - e\dot{x}^\nu\partial_\mu A_\nu =$$
$$= m\dot{x}^\nu\partial_\nu\dot{x}_\mu + e\dot{x}^\nu\partial_\nu A_\mu - e\dot{x}^\nu\partial_\mu A_\nu = 0. \tag{8}$$

Поскольку $\dot{x}^\nu\partial_\nu\dot{x}_\mu = \ddot{x}_\mu$, то из (8) следуют уравнения движения:

$$m\ddot{x}^\mu = eF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu.$$

2. Уравнение движения спина. Для исследования поведения спина электрона при заданном квазиклассическом движении необходимо усреднить по волновому пакету уравнение движения спинового оператора

$$\frac{dT^\mu}{dt} = \frac{\partial T^\mu}{\partial t} - \frac{i}{\hbar}[T^\mu H], \tag{9}$$

где H — гамильтониан уравнения Дирака. Поскольку нековариантная форма (9) усложняет вычисление коммутатора, то для практических расчетов удобно переписать (9) в виде

$$\frac{dT^\mu}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\gamma^0 D, T^\mu], \tag{10}$$

где

$$D = (i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m - i\frac{\mu'}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Мы продемонстрируем преимущества формы (10) при ковариантном выводе уравнения БМТ [6]. Вычисляя коммутатор (10), находим

$$\frac{m}{p_0}\dot{T}^\mu = \gamma^0\gamma^5\left\{\frac{e}{m}F^{\mu\nu}\gamma_\nu + \frac{e}{4m}\frac{g-2}{2}\left[\gamma^\mu\sigma^{\alpha\beta} - \sigma^{\alpha\beta}\gamma^\mu + 2\sigma^{\alpha\beta}\frac{\pi^\mu}{m}F_{\alpha\beta}\right]\right\}. \tag{11}$$

Далее, используя соотношение

$$\gamma^i\gamma^k\gamma^\alpha = g^{ik}\gamma^\alpha - g^{i\alpha}\gamma^k + g^{k\alpha}\gamma^i + ie^{ik\alpha\beta}\gamma^5\gamma_\beta,$$

получим

$$\frac{m}{p_0}\dot{T}^\mu = \frac{e}{m}\gamma^0\gamma^5\left[\frac{g}{2}F^{\mu\nu}\gamma_\nu + \frac{g-2}{2}\sigma^{\alpha\beta}\frac{\pi^\mu}{2m}F_{\alpha\beta}\right]. \tag{12}$$

Вычисляя с помощью (3) средние значения по спиновым переменным

$$\bar{u}\gamma^5\gamma^\mu u = 2ma^\mu, \quad \bar{u}\gamma^0 T^\mu u = 2p_0 a^\mu,$$
$$\bar{u}\gamma^5\sigma^{\alpha\beta}u = 2m(u^\beta a^\alpha - u^\alpha a^\beta)$$

и проведя усреднение (12) по волновому пакету, получим уравнение БМТ

$$\dot{a}^\mu = \frac{e}{m}\left[\frac{g}{2}F^{\mu\nu}a_\nu - \frac{g-2}{2}u^\mu F^{\alpha\beta}u_\alpha a_\beta\right].$$

3. Релятивистский эйкональный пропагатор. В работах Глаубера [7] и других авторов [8] успешно использовалось эйкональное приближение для анализа процессов, в которых участвуют высокоэнергичные частицы. Прогресс в этой области достигнут отчасти благодаря использованию эффективной функции распространения. Она учитывает вклад одной прямолинейной классической траектории. Мы получим релятивистское выражение (14) для пропагатора, введенного Глаубером в нерелятивистском случае.

Амплитуда перехода скалярной частицы из точки x_1 в точку x_2 определяется функцией ($\xi = x_2 - x_1$)

$$G(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip'\xi}}{p'^2 - m^2 - i0} d^4p' =$$

$$= -i(2\pi)^{-4} \int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{2m} d^4p' \exp\left[-ip'\xi + i(p'^2 - m^2)\frac{\tau}{2m}\right]. \qquad (13)$$

В этом представлении τ играет роль собственного времени. Действительно, фаза подынтегрального выражения $S = -p\xi + (p^2 - m^2)\frac{\tau}{2m}$ является решением уравнения Гамильтона—Якоби в переменных x^μ, τ [9]. Классическая траектория, соединяющая точки x_1 и x_2, определяется условиями $\frac{\partial S}{\partial p_\mu} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0$. Предположим, что частица входит в точку x_1 с импульсом p. Тогда наибольший вклад в (13) дает область интегрирования $p' \sim p$. Поэтому, разлагая в (13) показатель экспоненты в ряд до $(p'-p)^2$:

$$S = -p\xi + \left(-\xi + \frac{p}{m}\tau\right)(p' - p),$$

получим релятивистский пропагатор в эйкональном приближении

$$G(\xi) = -ie^{-ip\xi} \int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{2m} \delta^{(4)}(\xi - u\tau). \qquad (14)$$

Аналогичное приближение для электронного пропагатора отличается множителем $\hat{p} + m$.

Представление пропагатора в форме (14) позволяет просто найти в эйкональном приближении решение уравнений Клейна или Дирака

$$[(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial^\mu - eA^\mu) - m^2]\psi = 0 \qquad (15)$$

для частицы, движущейся во внешнем поле. В частном случае поле $A_\mu(x)$, создаваемое ядром (v_μ — скорость ядра):

$$A^\mu(x) = \frac{zev^\mu}{[(v\Delta x)^2 - (\Delta x)^2]^{\varkappa/2}}, \quad \Delta x = x - b.$$

Предположим, что длина волны начальной частицы существенно меньше области взаимодействия. Тогда можно считать, что

$$\psi = e^{-ipx}\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — медленно меняющаяся функция. Переходя к интегральной форме, представим (15) в виде

$$\varphi(x) = 1 + \int e^{ip(x-x')} G(x - x')(2epA - e^2A^2)\varphi(x') d^4x'. \qquad (16)$$

Подставляя в (16) функцию Грина (14), получим интегральное уравнение

$$\varphi(x') = 1 - i\int_0^\infty d\tau \left[euA(x') - \frac{e^2}{2}A^2(x')\right]\varphi(x'), \quad x' = x - u\tau,$$

где $u = p/m$ — скорость частицы. Решение этого уравнения

$$\varphi(x) = \exp\left[i\int_0^\infty \frac{d\tau}{2m}\left[\left(p - \frac{e}{c}A(x-u\tau)\right)^2 - m^2\right]\right]. \qquad (17)$$

Показатель экспоненты в (17), строго говоря, является первым членом разложения фазы волновой функции, записанной в виде $\psi(x) = A(x)e^{iS}$, если представитель A и S в виде ряда по обратным степеням импульса. Уравнение (16) по существу является интегральной формой метода плавных возмущений [10]. Оценки точности членов ряда для A и S рассмотрены в работе [11].

Автор выражает благодарность участникам семинара А. А. Соколова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М., 1973.
2. Фейнман Р. Статистическая механика. М., 1975.
3. Газиорович С. Физика элементарных частиц. М., 1969.
4. Швингер Ю. Частицы, источники, поля. Т. 1. М., 1976.
5. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.
6. Fradkin M., Good P. H. — «Jr, Rev. Mod. Phys.», 1961, 33 (2), 343; Michel L., Wightman A. S. — «Phys. Rev.», 1955, 98, 1190; Bargman V., Michel L., Telegdi V. L. — «Phys. Rev. Lett.», 1959, 2, 435.
7. Глаубер Р. — УФН, 1971, 103, 641.
8. Никитин Е. Е., Овчинникова М. Я. — УФН, 1971, 104, 379.
9. Фок В. А. Работы по квантовой теории поля. Л., 1957, 141.
10. Рытов С. М. Введение в Статистическую радиофизику. М., 1966.
11. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. — ТМФ, 1975, 22, 6, 1185; ТМФ, 1975, 23, 11.

Поступила в редакцию
26.5 1977 г.
Кафедра
теоретической физики