УДК 550.834

В. А. Буров
А. А. Горюнов

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНЫХ ВОЛН

Решается задача нелинейной фильтрации выборки с целью получения оптимальной (в смысле метода максимального правдоподобия) оценки рассеивающей неоднородности плотности среды и скорости звука в ней при известном характере источника первичного поля в присутствии помех пяти типов, распределенных по нормальному закону с известными матрицами вторых моментов.

1. Рассмотрим распространение скалярной волны в неоднородной среде с плотностью $\rho=\rho(\mathbf{r})$ и скоростью звука $c=c(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}=(r_1, r_2, r_3)\in R_3$. Система уравнений акустики для неоднородной среды, как известно (например, [1]), имеет вид

$$\begin{cases} \rho^{-1} c^{-2} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \rho \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь p — звуковое давление, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ — вектор объемной скорости, а $\mathbf{f}=(f_1, f_2, f_3)$ — вектор объемной силы. Исключая из системы (1) вектор $\mathbf{v}$, приходим к волновому уравнению для p:

$$c^{-2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \triangle p + \rho^{-1} [(\nabla p - \mathbf{f}) \nabla \rho] + \operatorname{div} \overline{\mathbf{f}} = 0. \tag{2}$$

Предположим, что объемные силы $\mathbf{f}$ локализованы в области X — излучающей области, а неоднородность плотности среды и скорости звука локализована в области $\mathcal{R}$ — области рассеяния. Таким образом, $\mathbf{f}\equiv 0$ вне X, а $\rho(\mathbf{r})$ и $c(\mathbf{r})$ представимы в виде:

$$\begin{gathered} \rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \exp \sigma(\mathbf{r}); \quad \sigma(\mathbf{r}) \equiv 0 \text{ вне } \mathcal{R}, \\ c(\mathbf{r}) = c_0 \sqrt{\varepsilon^{-1}(\mathbf{r})}\,; \quad \varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 1 \text{ вне } \mathcal{R}, \end{gathered} \tag{3}$$

где ρ_0 и c_0 — постоянные (плотность среды и скорость звука вне области рассеяния); неоднородность описывается функциями $\sigma(\mathbf{r})$ и $\varepsilon(\mathbf{r})$.

Области $X\subset R_3$ и $\mathcal{R}\subset R_3$ — произвольные непересекающиеся области ($X\cap\mathcal{R}=\varnothing$) конечного объема.

Опуская в (2) член $\rho^{-1}(\mathbf{f}\nabla\rho)$ в силу условия $X\cap\mathcal{R}=\varnothing$, используя (3) и переобозначая $\operatorname{div}\mathbf{f}=-f_0$, $p=U$, получаем уравнение

$$\nabla U + \frac{\omega^2}{c_0^2} \varepsilon U = -\nabla U \nabla \sigma + f_0 \tag{4}$$

(временная зависимость U есть $\exp(-i\omega t)$). Следуя, например, [2], введем функцию Грина однородного пространства:

$$g(\mathbf{r}-\mathbf{y})=|\mathbf{r}-\mathbf{y}|^{-1}\exp\left\{i\frac{\omega}{c_0}|\mathbf{r}-\mathbf{y}|\right\}$$

и перейдем к известному интегральному уравнению

$$U(\mathbf{y})-U^0(\mathbf{y})=-\int g(\mathbf{r}-\mathbf{y})\left\{\frac{\omega^2}{c_0^2}U(\mathbf{r})[\varepsilon(\mathbf{r})-1]+\nabla U(\mathbf{r})\nabla\sigma(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r}, \tag{5}$$

где $\mathbf{r}\in\mathcal{R}$, $\mathbf{y}$ — любое ($\mathbf{y}\in R_3$), а $U^0(\mathbf{y})$ — первичное (облучающее) поле:

$$U^0(\mathbf{y})=\int g(\mathbf{x}-\mathbf{y})f_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x};\quad \mathbf{x}\in X. \tag{6}$$

Здесь и далее частота считается фиксированной и зависимость от нее опускается.

2. Постановка задачи. Необходимо определить $\varepsilon(\mathbf{r})$ и $\sigma(\mathbf{r})$ — функции, характеризующие неоднородность плотности среды и скорости звука, локализованную в области $\mathcal{R}$ при известных источниках f_0 первичного (облучающего) поля, локализованных в области X, на основании измерений поля U, проводимых в области Y (конечного ненулевого объема), удовлетворяющей условию отделимости от области $\mathcal{R}: Y\cap\mathcal{R}=\varnothing$, при наличии следующей априорной информации:

а) реально замеряемое на Y рассеянное поле V представляет собой сумму истинного рассеянного поля $u=U-U^0$ и шума измерения n:

$$V=u+n; \tag{7}$$

б) неоднородность в $\mathcal{R}$ представима в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{r})-1&=\mu_0(\mathbf{r})+\mu(\mathbf{r})+\eta(\mathbf{r}),\\ \sigma(\mathbf{r})&=\xi_0(\mathbf{r})+\xi(\mathbf{r})+\zeta(\mathbf{r}),\end{aligned} \tag{8}$$

где μ_0, ξ_0 — ожидаемый вид неоднородности (априорная информация о пространственном распределении неоднородности в $\mathcal{R}$), μ, ξ — некоторые возможные отклонения истинной неоднородности от ожидаемой (мера неуверенности в априорной информации μ_0, ξ_0), а η, ζ — функции, описывающие рассеивающий фон в $\mathcal{R}$ (маскирующий искомую истинную неоднородность $\mu_0+\mu$ и $\xi_0+\xi$);

в) случайные величины n, μ, η, ξ, ζ являются взаимонезависимыми, гауссовыми, с нулевыми средними, ковариационные матрицы которых считаются известными.

Таким образом, задача представляет собой обратную активную локационную задачу акустики для мультистатической ограниченной апертуры $X\cup Y$ (допустимо $X\cap Y=\varnothing$) и произвольно большой, но ограниченной области поиска $\mathcal{R}$.

Предположения о помеховой ситуации (ошибка измерения n плюс паразитные рассеиватели η, ζ) охватывают довольно широкий диапазон практически важных случаев.

Вариацией дисперсий величин μ и ξ регулируется вес, придаваемый априорной информации μ_0 и ξ_0 в процессе оценки ε и σ на основании измерения рассеянного поля.

3. Рассматривая уравнение (5) для $\mathbf{y}\in Y$ и $\mathbf{y}\in\mathcal{R}$ и разлагая в нем все величины по системе $\{\varphi_i\}$ — собственных функций оператора распространения поля из области $\mathcal{R}$ в область Y, — оператора Q, [3]:

$$Q\varphi_i(\mathbf{r})=\int g(\mathbf{r}-\mathbf{y})\varphi_i(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\lambda_i\varphi_i(\mathbf{y});\ \mathbf{r}\in\mathcal{R};\ \mathbf{y}\in Y, \tag{9}$$

а также по произвольной, полной в $L_2(R)$ ортонормальной системе дифференцируемых функций $\{\psi_i\}$, приходим к уравнению

$$u_j = -\lambda_j \sum \left(\widetilde{U}_i^0 + G_i^m \frac{u_m}{\lambda_m} \right) \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} C_{ik}^j \in_k + \widetilde{C}_{ik}^j \sigma_k \right), \tag{10}$$

где

$$u_k = \int [U(\mathbf{y}) - U^0(\mathbf{y})] \varphi_k(\mathbf{y}) d\mathbf{y}; \quad \widetilde{U}_k^0 = \int d\mathbf{r}\, \psi_k(\mathbf{r}) \int g(\mathbf{r} - \mathbf{x}) f_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x};$$

$$\in_k = \int [\varepsilon(\mathbf{r}) - 1] \psi_k(\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \quad \sigma_k = \int \sigma(\mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \tag{11}$$

$$C_{ik}^j = \int \varphi_j(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}) d\bar{r}; \quad \widetilde{C}_{ik}^j = \int \varphi_j(\mathbf{r}) \nabla \psi_i(\mathbf{r}) \nabla \psi_k(\mathbf{r}) \psi_k(\bar{r});$$

$$G_i^m = \iint g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_i(\mathbf{r}) \varphi_m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'; \ \mathbf{x} \in X; \ \mathbf{y} \in Y; \ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathcal{R},$$

причем выражение для G_i^m имеет смысл в силу слабой особенности $g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ на $\mathcal{R}$ [4], а $\widetilde{C}_{ik}^j$ имеет смысл в силу того, что $\{\psi_i\}$ дифференциируемы на $\mathcal{R}$.

Запишем для сокращения записи систему (10) в виде

$$u_j = -\Sigma A_{jk} \in_k - \Sigma B_{mjk} u_m \in_k - \Sigma \widetilde{A}_{jk} \sigma_k - \Sigma \widetilde{B}_{mjk} u_m \sigma_k, \tag{12}$$

где матрицы A_{jk}, B_{mjk}, $\widetilde{A}_{jk}$, $\widetilde{B}_{mjk}$ априорно известны:

$$A_{jk} = \lambda_j \frac{\omega^2}{c_0^2} \Sigma \widetilde{U}_i^0 C_{ik}^j; \ \widetilde{A}_{jk} = \lambda_j \Sigma \widetilde{U}_i^0 \widetilde{C}_{ik}^j;$$

$$B_{mjk} = \lambda_j \frac{\omega^2}{c_0^2} \sum \frac{G_i^m}{\lambda_m} C_{ik}^j; \ \widetilde{B}_{mjk} = \lambda_j \sum \frac{G_i^m}{\lambda_m} \widetilde{C}_{ik}^j$$

(все суммы подразумеваются конечными). Возможность удовлетвориться конечными суммами обусловлена наличием помех, вводимых в рассмотренном ниже, которые всегда ограничивают точность определения $\varepsilon(\mathbf{r})$ и $\sigma(\mathbf{r})$. Число членов по j и m в два раза больше набора значений, пробегаемых индексом k, т. е. $k=1, 2, \ldots, K$, j, $m=1, 2, \ldots, 2K$. Такое соотношение можно обеспечить увеличением набора экспериментальных данных.

4. Задача определения $\in_k$ и σ_k является нелинейной некорректной задачей, регуляризовать которую можно, введя некоторую априорную информацию об искомой функции и помехах, понимая затем под решением этой задачи нахождение оптимальных оценок [5]. Используя априорную информацию и разлагая n по системе $\{\psi_i\}$, а μ_0, ξ_0, μ, ξ, η, ζ — по системе $\{\psi_i\}$, преобразуем (12) к виду

$$V_j - n_j = -\Sigma A_{jk} (\mu_k^0 + \mu_k + \eta_k) - \Sigma B_{mjk} V_m (\mu_k^0 + \mu_k + \eta_k) -$$
$$- \Sigma \widetilde{A}_{jk} (\xi_k^0 + \xi_k + \zeta_k) + \Sigma \widetilde{B}_{mjk} n_m (\xi_k^0 + \xi_k + \zeta_k) +$$
$$+ \Sigma B_{mjk} n_m (\mu_k^0 + \mu_k + \eta_k) - \Sigma \widetilde{B}_{mjk} V_m (\xi_k^0 + \xi_k + \zeta_k);$$

замечая, что $n_m(\mu_k + \eta_k)$ и $n_m(\xi_k + \zeta_k)$ — величины второго порядка малости относительно величин $n_m \mu_k^0$ и $n_m \xi_k^0$ соответственно, опустим их и получим окончательно:

$$n_j + \Sigma (B_{mjk} \mu_k^0 + B_{mjk} \xi_k^0) n_m = \Sigma (A_{jk} \mu_k^0 + \widetilde{A}_{jk} \xi_k^0) +$$

$$+\Sigma(B_{mjk}\mu_k^0+\widetilde{B}_{mjk}\xi_k^0)V_m+\Sigma[A_{jk}(\mu_k+\eta_k)+\widetilde{A}_{jk}(\xi_k+\zeta_k)]+$$
$$+\Sigma[B_{mjk}(\mu_k+\eta_k)+\widetilde{B}_{mjk}(\xi_k+\zeta_k)]V_m+V_j,$$

или в векторном виде:

$$\mathbf{n}=\mathbf{m}+\Theta(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\eta})+\widetilde{\Theta}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}), \tag{13}$$

где Θ и $\widetilde{\Theta}$, вообще говоря, прямоугольные матрицы:

$$\Theta=[E+B_0+\widetilde{B}_0]^{-1}[A+B\mathbf{V}];\quad \widetilde{\Theta}=[E+B_0+\widetilde{B}_0]^{-1}[\widetilde{A}+\widetilde{B}\mathbf{V}];$$
$$E=\|\delta_{ij}\|;\quad A=\|A_{jk}\|;\quad \widetilde{A}=\|\widetilde{A}_{jk}\|;\quad B=\|B_{mjk}\|;\quad \widetilde{B}=\|\widetilde{B}_{mjk}\|;$$
$$B_0=\|\Sigma B_{mjk}\mu_k^0\|;\quad \widetilde{B}_0=\|\Sigma B_{mjk}\xi_k^0\|,$$

а $\mathbf{V}$, $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\mu}_0$, $\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ и $\mathbf{m}$ — вектор-столбцы:

$$\mathbf{m}=[E+B_0+\widetilde{B}_0)^{-1}[A\boldsymbol{\mu}_0+\widetilde{A}\boldsymbol{\xi}_0]+\mathbf{V},$$
$$\mathbf{V}=\|V_j\|;\quad \mathbf{n}=\|n_j\|;\quad \boldsymbol{\mu}=\|\mu_k\|;\quad \boldsymbol{\eta}=\|\eta_k\|;\quad \boldsymbol{\xi}=\|\xi_k\|;\quad \boldsymbol{\zeta}=\|\zeta_k\|,$$

состоящие из коэффициентов разложения этих величин по системе $\{\psi_j\}$, $\{\psi_k\}$ $(j=1, 2, ..., 2K;\ k=1, 2, ..., K)$.

Ковариационные матрицы коэффициентов разложения помех, вычисляемые по известным ковариациям и обозначаемые N, М, Н, Ξ, Z, известны в силу предположения в). Например, для матрицы М получаем

$$M=\|M_{kl}\|=\left\|\iint\langle\mu(\mathbf{r})\mu^*(\mathbf{r}')\rangle\psi_k(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{r}'\right\|;\quad \mathbf{r},\mathbf{r}'\in\mathcal{R}, \tag{14}$$

аналогично для Н, Ξ, Z, тогда как матрицу N ищем, раскладывая ковариацию на приемной апертуре Y:

$$N=\|N_{jm}\|=\left\|\langle n(\mathbf{y})n^*(\mathbf{y}')\rangle\varphi_j(\mathbf{y})\varphi_m(\mathbf{y}')\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{y}'\right\|;\quad \mathbf{y},\mathbf{y}'\in Y. \tag{15}$$

5. Логарифм функции правдоподобия L в силу взаимонезависимости помех запишем, опуская не участвующие в варьировании члены:

$$-\ln L=-\ln\left\{P\left(\frac{n}{\mu,\eta,\xi,\zeta}\right)P(\mu)P(\eta)P(\xi)P(\zeta)\right\}=$$
$$=[\mathbf{m}+\Theta(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\eta})+\widetilde{\Theta}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\zeta})]^+N^{-1}[\mathbf{m}+\Theta(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\eta})+\widetilde{\Theta}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\zeta})]+$$
$$+\boldsymbol{\mu}^+\mathrm{M}^{-1}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\eta}^+\mathrm{H}^{-1}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}^+\Xi^{-1}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\zeta}^+\mathrm{Z}^{-1}\boldsymbol{\zeta}\to\min_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}}. \tag{16}$$

Варьируя (16), получаем систему, линейную по оцениваемым параметрам $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\xi}$:

$$[\Theta^+N^{-1}\Theta+\mathrm{M}^{-1}]\,\hat{\boldsymbol{\mu}}+\Theta^+N^{-1}\Theta\hat{\boldsymbol{\eta}}+\Theta^+N^{-1}\widetilde{\Theta}\hat{\boldsymbol{\xi}}+\Theta^+N^{-1}\widetilde{\Theta}\hat{\boldsymbol{\zeta}}=-\Theta^+N^{-1}\mathbf{m},$$
$$\Theta^+N^{-1}\Theta\hat{\boldsymbol{\mu}}+[\Theta^+N^{-1}\Theta+\mathrm{H}^{-1}]\,\hat{\boldsymbol{\eta}}+\Theta^+N^{-1}\widetilde{\Theta}\hat{\boldsymbol{\xi}}+\Theta^+N^{-1}\widetilde{\Theta}\hat{\boldsymbol{\zeta}}=-\Theta^+N^{-1}\mathbf{m},$$
$$\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\Theta\hat{\boldsymbol{\mu}}+\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\Theta\hat{\boldsymbol{\eta}}+[\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\widetilde{\Theta}+\Xi^{-1}]\,\hat{\boldsymbol{\xi}}+\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\widetilde{\Theta}\hat{\boldsymbol{\zeta}}=-\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\mathbf{m},$$
$$\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\Theta\hat{\boldsymbol{\mu}}+\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\Theta\hat{\boldsymbol{\eta}}+\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\widetilde{\Theta}\hat{\boldsymbol{\xi}}+[\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\widetilde{\Theta}+\mathrm{Z}^{-1}]\,\hat{\boldsymbol{\zeta}}=-\widetilde{\Theta}^+N^{-1}\mathbf{m}, \tag{17}$$

при этом одновременно оцениваются η и ζ как параметры обстановки.

6. Таким образом, система (17) дает алгоритм оптимальной нелинейной фильтрации выборки $\mathbf{V}$ с целью получения оценок рассеивающих неоднородностей $\widehat{\mu}$ и $\widehat{\xi}$ (а также параметров обстановки $\widehat{\eta}$ и $\widehat{\zeta}$). Эту фильтрацию можно осуществить в два этапа.

На первом этапе вычисляется матрица Φ, зависящая от вектора выборки $\mathbf{V}$:

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} \Theta^{+}N^{-1}\Theta + M^{-1}, & \Theta^{+}N^{-1}\Theta, & \Theta^{+}N^{-1}\Theta, & \Theta^{+}N^{-1}\widetilde{\Theta} \\ \Theta^{+}N^{-1}\Theta, & \Theta^{+}N^{-1}\Theta + H^{-1}, & \Theta^{+}N^{-1}\widetilde{\Theta}, & \Theta^{+}N^{-1}\widetilde{\Theta} \\ \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\Theta, & \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\Theta, & \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\widetilde{\Theta} + \Xi^{-1}, & \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\widetilde{\Theta} \\ \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\Theta, & \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\Theta, & \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\widetilde{\Theta}, & \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\widetilde{\Theta} + Z^{-1} \end{matrix} \right\|^{-1}, \tag{18}$$

на втором этапе полученный оператор (18) применяется к вектору $\mathbf{e}$, линейно зависящему от $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{e} = - \left\| \begin{matrix} \Theta^{+}N^{-1}\mathbf{m} \\ \Theta^{+}N^{-1}\mathbf{m} \\ \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\mathbf{m} \\ \widetilde{\Theta}^{+}N^{-1}\mathbf{m} \end{matrix} \right\|. \tag{19}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорюк М. В. — «Акустический журнал», 1976, 12, вып. 3, 439—443.
2. Каценеленбаум Б. З. — «Радиотехника и электроника», 1968, № 4, 586—590.
3. Буров В. А., Горюнов А. А. — «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астр.», 1976, № 6, 728—734.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1971.
5. Савелова Т. И., Тихомиров В. В. — «Журнал вычислит. матем. и матем. физ.», 1973, 13, № 3, 555—563.
6. Буров В. А., Дмитриев О. В. — «Радиотехника и электроника», 1973, 18, № 6, 1276—1279.

Поступила в редакцию
25.5 1977 г.
Кафедра
акустики