КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 530.12 : 531.51

Г. В. Исаев

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БРИКГОФА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В последние годы интенсивно обсуждался вопрос о поведении различных полей в общей теории относительности, что интересно, с одной стороны, в связи с гравитационным коллапсом и так называемыми «черными дырами» (см. обзор [1] и приведенные там ссылки) и, с другой стороны, в связи с надеждой на регуляризующую роль кривизны пространства-времени в квантовой теории поля (см. обзор [2] и приведенные там ссылки). Наряду с максвелловской электродинамикой, исходящей из лагранжевой плотности $L \sim F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, рассматривались различные нелинейные обобщения. Например, Березин и Марков [3] в связи со слабыми взаимодействиями в процессе гравитационного коллапса рассматривали нелинейные поля с лагранжевой плотностью вида $L \sim (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^l$, где $l = (n+1)/(2n+1)$, $n=0, 1, 2...$[1]. На необходимость рассмотрения нелинейных полей более общего вида в искривленной метрике в связи с возникновением в нелинейных теориях сверхсветовых скоростей указывали Блохинцев [4], Нгуен Ван Хьеу [5] и другие (см. ссылки в [5]).

В этой работе рассмотрен наиболее общий класс нелинейных безмассовых векторных полей в рамках общей теории относительности и доказано следующее утверждение.

В центрально-симметричном случае в пустоте метрика и поле являются статическими.

Аналогичное утверждение в отсутствие внешних полей носит в общей теории относительности название теоремы Биркгофа.

Векторное поле. Приняты обозначения: $,\mu$ — обычная производная по X^μ, $;\mu$ — ковариантная производная по X^μ. Рассмотрим нелинейное векторное поле, определяемое лагранжевой плотностью самого общего вида:

$$L = L(K, I), \tag{1}$$

где L — произвольная однократно дифференцируемая функция двух возможных независимых инвариантов векторного поля-скаляра K и псевдоскаляра I:

$$K = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$
$$I = -\frac{1}{8}\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}F^{\mu\nu}F^{\sigma\rho}. \tag{2}$$

Здесь $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ — тензор поля, $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ — единичный абсолютно антисимметричный псевдотензор с ковариантными компонентами $\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ (подробности см., например, в [6]). Уравнения поля получаются из принципа наименьшего действия с лагранжевой плотностью (1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial X^\nu}\left[\sqrt{-g}\left(\frac{\partial L}{\partial K}\,\frac{\partial K}{\partial F_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial I}\,\frac{\partial I}{\partial F_{\mu\nu}}\right)\right] = 0. \tag{3}$$

[1] Ограничение на l следует из условия положительной определенности плотности энергии T_0^0 (см. [3]).

Тензор энергии-импульса получается в симметричном виде по формуле Гильберта (см. [6]):

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\,L)-\frac{\partial}{\partial x^{\xi}}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial(g^{\mu\nu}{}_{,\xi})}\right]. \tag{4}$$

Благодаря тому, что 4-потенциал A_μ входит в лагранжеву плотность L только в виде комбинации

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}\equiv A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu},$$

(см. [6]), L не зависит от символов Кристоффеля и, следовательно, не зависит от производных $g^{\mu\nu}{}_{,\xi}$. Тогда второй член в (4) обращается в нуль. С учетом этого

$$T_{\mu\nu}=-g^{\sigma\sigma'}\frac{\partial L}{\partial K}F_{\mu\sigma}F_{\nu\sigma'}+\frac{1}{8}g_{\mu\nu}\frac{\partial L}{\partial I}\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho}F^{\alpha\beta}F^{\sigma\rho}-g_{\mu\nu}L. \tag{5}$$

Центрально-симметричный случай. Параметризуем интервал в виде [6]

$$dS^2=e^{\nu}dt^2-e^{\lambda}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2). \tag{6}$$

Тогда $\sqrt{-g}=e^{\frac{\lambda+\nu}{2}}r^2\sin\theta$, где введены координаты $(X^0, X^1, X^2, X^3)\equiv(t, r, \theta, \varphi)$; скорость света $c=1$. В центрально-симметричном случае отличны от нуля только две компоненты тензора поля $F_{01}=-F_{10}$. В этом случае псевдоскаляр I, а вместе с ним и второй член в правой части (5), тождественно обращаются в нуль.

Два не обращающихся тождественно в нуль уравнения поля (3) в случае центральной симметрии принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{\frac{\lambda+\nu}{2}}r^2\frac{\partial L}{\partial F_{01}}\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{\frac{\lambda+\nu}{2}}r^2\frac{\partial L}{\partial F_{01}}\right]=0. \tag{6'}$$

Уравнения Эйнштейна. В случае центральной симметрии независимые, не обращающиеся тождественно в нуль, компоненты уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=8\pi kT_1^1, \tag{7}$$

$$-e^{-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=8\pi kT_0^0, \tag{8}$$

$$-e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r}=8\pi kT_0^1, \tag{9}$$

где штрихом обозначена производная по радиусу, точкой — производная по времени (подробности см. в [6]).

Уравнения для T_2^2 и T_3^3 (в рассматриваемом случае $T_2^2\equiv T_3^3$) следуют из (7—9) в силу тождеств Бьянки. Вычисляя нужные нам компоненты тензора энергии-импульса по формуле (5), имеем:

$$T_0^0=e^{-(\lambda+\nu)}\frac{\partial L}{\partial K}(F_{01})^2-L, \tag{10}$$

$$T_1^1=e^{-(\lambda+\nu)}\frac{\partial L}{\partial K}(F_{10})^2-L, \tag{11}$$

$$T_0^1\equiv 0. \tag{12}$$

Вычитая (8) из (7) и учитывая, что $T_0^0 \equiv T_1^1$, имеем[2]

$$\lambda' + \nu' = 0,$$

отсюда

$$\lambda + \nu = f(t). \tag{13}$$

При выборе интервала в виде (6) остается еще возможность, не нарушая центральной симметрии и вида (6′), сделать преобразование времени вида $t=\varphi(t')$ (см. [6]). Выбрав

$$t = \int \exp\,[f(t')/2]\,dt',$$

где $f(t')$ — функция из правой части (13), получим

$$\lambda + \nu = 0. \tag{14}$$

Из уравнения Эйнштейна (9), (12) следует, что $\lambda=\lambda(r)$, тогда из (14) видно, что и $\nu=\nu(r)$. Статичность метрики доказана. Статичность поля непосредственно следует из (6) и условия (14).

Таким образом, доказан аналог теоремы Биркгофа. Условие (14) упрощает задачу и позволяет точно решить систему уравнений Эйнштейна и рассматриваемого поля (в рамках центральной симметрии). Действительно, в силу условия (14) компоненты метрического тензора вообще не войдут в уравнения поля (6). Тогда из уравнений поля (6) можно найти напряженность поля как функцию только координат. Эта зависимость такая же, как в плоском пространстве[3]. В тензор энергии-импульса (10), (11) компоненты метрического тензора также не войдут. Тогда в правой части уравнения (7) мы получим известную функцию радиуса. Переписав (7) в удобной для решения форме, имеем уравнение

$$(e^{-\lambda})' + \left(\frac{1}{r}\right) e^{-\lambda} = \frac{1}{r} - 8\pi\, krT_0^0(r);$$

его решение

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{\text{const}}{r} - \frac{8\pi k}{r}\int\limits_r^\infty \xi^2\, T_0^0(\xi)\, d\xi.$$

Из условия, что при $T_{\mu\nu}\to 0$ мы должны получить решение Шварцшильда, находим: const$=-2km$. В частности, при $L=\text{const}\cdot K$ все вышесказанное относится к Максвелловскому электромагнитному полю; при $L=\text{const}\cdot(K)^{(n+1)/(2n+1)}$ $(n=0, 1, 2...)$ — к полям, рассмотренным Березиным и Марковым [3]; при $L=\text{const}[1-(1-K-I^2)^{1/2}]$ — к нелинейной электродинамике Борна — Инфельда [7].

В заключение автор благодарит Р. А. Асанова за многочисленные обсуждения, проф. Н. А. Черникова за полезные замечания и проф. Д. И. Блохинцева за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков М. А. — «Успехи физ. наук», 1973, **111**, 3.
2. Салам А. — В кн.: Квантовая гравитация и топология. М., 1973.
3. Березин Б. А., Марков М. А. — ТМФ., 1972, **12**, 153.
4. Blokhintsev D. I. — «Nuovo Cimento», 1956, Supp. **X7**, 4, N 4, 629.
5. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу — ТМФ, 1970, 2, № 1, 55.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1973.
7. Born M., Infeld L. — «Proc. Roy Soc.», 1934, **A144**, 425.

Поступила в редакцию
3.5 1977 г.
НИИЯФ

[2] Для массивных полей лагранжева плотность L зависит также от члена $m^2 A_\mu A^\mu$, вследствие чего нарушается условие $T_0^0 \equiv T_1^1$, и дальнейшее доказательство для них не проходит.

[3] В случае решения Нордстрема — Рейсснера этот результат известен. Напряженность электрического поля имеет вид $E_r=F_{01}=\text{const}/r_2$, компоненты же метрического тензора отличны от своих «плоских» значений.