УДК 538.569:537.533.7:621.372.414

Ю. И. Воронцов
В. В. Колесов

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГИИ СВЧ-РЕЗОНАТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрено взаимодействие электронного луча с полем СВЧ-резонатора. Получено выражение для шумовой температуры устройства. Оценена минимальная достижимая шумовая температура для однопролетной системы.

Успехи в создании электронно-оптических систем дают возможность существенно увеличить чувствительность при измерении энергии электромагнитных резонаторов с помощью пучка электронов. Фундаментальный предел чувствительности такого метода определяется дифракцией электронов. Поскольку гамильтониан взаимодействия резонатора с электроном пропорционален мгновенному значению заряда q (имеется в виду резонатор клистронного типа), то энергия резонатора определяется через измеренные значения заряда и его производной. В силу соотношения неопределенности Гейзенберга максимальная точность определения энергии таким способом равна $\sqrt{n}\hbar\omega$, где n — число квантов энергии в резонаторе. Такая чувствительность может быть получена при условии, что размер фокального пятна определяется только дифракцией электронов [1]. Достижению этого предела препятствуют погрешности электронно-оптических систем.

В данной работе анализируется чувствительность измерения энергии резонаторов при условии, что в электронно-оптической системе определяющую роль играют аберрации и конечные размеры источников электронов, а не дифракция. Схема измерения показана на рис. 1.

Формируемый электронной пушкой пучок после взаимодействия с полем резонатора собирается электронной линзой. В области кроссовера пучка располагаются два приемных электрода. Под действием поля резонатора кроссовер расплывается и соответственно меняется число регистрируемых электронов. Поскольку фаза влета каждого электрона в резонатор случайна, среднее число регистрируемых электронов при относительно малых колебаниях луча пропорционально среднему квадрату напряженности электрического поля в емкостном зазоре $\overline{\varepsilon^2}$.

Величина $\overline{\varepsilon^2}$ определяется начальной энергией резонатора и изменением энергии под действием электронного пучка. Параметры измерительной системы должны быть выбраны так, чтобы за время измерения это изменение энергии было относительно малым. Анализ системы из решений самосогласованной задачи об энергообмене пучка с резонатором [2] достаточно сложен, поэтому расчет такой системы можно вести методом последовательных приближений.

В первом приближении при расчете числа регистрируемых электронов можно считать заданной энергию резонатора, а при расчете

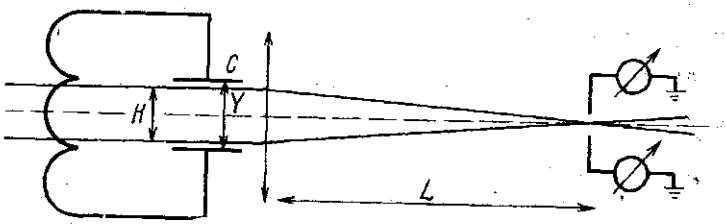
влияния электронов на резонатор считать заданным движение электронов. Анализ взаимодействия пучка электронов с резонатором в таком приближении дан в работе [1]. Показано, что средняя энергия резонатора, взаимодействующего только с электронным пучком, ось которого лежит в плоскости симметрии конденсатора, увеличивается на

$$\delta\bar{E} = \frac{e^2}{2C}\left[\frac{H^2}{3Y^2} + \frac{(4+\pi^2)\,\bar{V}_y^2}{\omega^2 Y^2}\right]N. \qquad (1)$$

Дисперсия энергии равна

$$\sigma^2 = 2E_1\delta\bar{E}, \qquad (2)$$

где E_1 — начальное значение энергии резонатора, e — заряд электрона, N — общее число электронов, C — емкость конденсатора, H — сечение пучка у входа в резонатор, Y — расстояние между пластинами конденсатора, $\bar{V}_y^2$ — среднеквадратичное значение поперечной компоненты



скорости электронов. При выводе формулы (1) и всех последующих соотношений считалось, что время взаимодействия электрона с резонатором равно половине периода колебаний.

Во втором приближении, учитывая смещение электронов в резонаторе под действием поля, найдем среднюю энергию, отбираемую электронами за период колебаний:

$$W_1 = \frac{4e^2E}{m\omega^2Y^2C}N_1\frac{2\pi}{\omega}, \qquad (3)$$

где N_1 — число электронов, пролетающих через резонатор в единицу времени, m — масса электрона.

Соотношения (1) и (3) позволяют определить время релаксации системы резонатор — пучок τ_e^* и равновесную энергию резонатора E_{0e}. Исходя из общих соотношений между τ_e^*, E, W_1, получим

$$\tau_e^* = \frac{2\pi}{\omega}\frac{E}{W_1} = \frac{C\omega^2Y^2m}{4e^2N_1}. \qquad (4)$$

Приравнивая (1) и (3) при $N = N_1\frac{2\pi}{\omega}$, найдем

$$E_{0e} = \frac{m\omega^2H^2}{24} + \frac{4+\pi^2}{8}m\overline{V_y^2}. \qquad (5)$$

Минимальное значение определяется для $\overline{V_y^2}$ соотношением неопределенности Гейзенберга: $\overline{V_y^2} = \frac{3\hbar^2}{m^2H^2}$. Тогда из (5) получается при оптимальном

$$H \approx 3{,}5\,(\hbar/\omega m)^{1/2}, \quad E_{0e} \simeq \hbar\omega.$$

Реальный резонатор взаимодействует не только с пучком электронов, но и с некоторым термостатом. Если температура термостата равна $T_т$, а время релаксации системы резонатор — термостат равно $\tau_т^*$, то равновесная энергия резонатора, взаимодействующего с термостатом и пучком электронов, будет равна

$$E_0 = kT_т \frac{\tau^*}{\tau_т^*} + E_{0e} \frac{\tau^*}{\tau_e^*}, \tag{6}$$

где $\tau^* = \tau_e^* \tau_т^* / (\tau_e^* + \tau_т^*)$, k — постоянная Больцмана.

Считая распределение w_y плотности потока электронов в кроссовере гауссовым, найдем среднее число регистрируемых электронов $\overline{N}_p$. Величина $\overline{N}_p$ максимальная, если внутренние края электродов располагаются в точках максимальной крутизны функции $w(y)$

$$y_1 = \pm \sqrt{\overline{y^2}}.$$

В этом случае на два симметрично расположенных полубесконечных электрода попадает

$$\overline{N}_p = N(0{,}3 + \overline{\xi}^2/d^2) \tag{7}$$

электронов;

$$d = 2\sqrt{\overline{y^2}}; \quad \overline{\xi}^2 = \gamma^2 E; \quad \gamma^2 = (2eL/m\omega VY\sqrt{C})^2. \tag{7a}$$

Здесь V — составляющая скорости электронов вдоль оси пучка, L — расстояние от линзы до кроссовера. Соотношение (7) справедливо при $\overline{\xi}^2 \ll d^2$.

Стандартное отклонение числа регистрируемых электронов, соответствующее биноминальному закону распределения вероятности попадания электронов на электроды и пуассоновскому распределению числа N, равно $\sqrt{\overline{N}_p}$. Следовательно, можно обнаружить такое изменение средней энергии поля, при котором изменение $\overline{N}_p$ превышает $\sqrt{\overline{N}_p}$. Этому соответствует

$$\Delta E_1 \geqslant \frac{d^2}{\gamma^2} \left[\left(0{,}3 + \frac{\gamma^2 E}{d^2}\right) \Big/ N_1 \tau \right]^{1/2}, \tag{8}$$

где τ — время измерения.

С другой стороны, при постоянном значении средней энергии стандартное отклонение измеренного значения от ее истинного значения даже при измерении с помощью идеального детектора, но в течение конечного времени $\tau > \tau^*$, равно

$$\Delta E_\tau = \sqrt{\sigma_0^2 \tau^* / \tau}, \tag{9}$$

где σ_0^2 — дисперсия энергии резонатора в равновесном состоянии. Полная среднеквадратичная ошибка измерения энергии равна

$$(\Delta E)^2 = (\Delta E_1)^2 + (\Delta E_\tau)^2. \tag{10}$$

Поскольку $\sigma_0^2 = E_0^2$, то

$$(\Delta E)^2 = \left[E_0 \left(\frac{d^2}{\gamma^2 N_1 \tau^*} + w_1 N_1 \tau^* + kT_т \right) + \frac{0{,}3 d^4}{\gamma^4 N_1 \tau^*} \right] \frac{\tau^*}{\tau}. \tag{11}$$

Здесь

$$w_1 = \delta\bar{E}/N. \tag{12}$$

В этом случае соотношение (11) определяет полную ошибку измерения равновесного значения энергии резонатора E_0.

Шумовую температуру $T_ш$ измерительной системы можно определить из условия

$$\Delta E = k(T_т + T_ш)\sqrt{\tau^*/\tau}. \tag{13}$$

Приравнивая (11) и (13) с учетом (4) — (6), получим

$$T_ш = T_т(\sqrt{f} - 1), \tag{14}$$

где

$$f = \frac{1}{kT_т}\left(\frac{d^2}{\gamma^2 N_1\tau^*} + 2w_1N_1\tau^* + \frac{(w_1N_1\tau^*)^2}{kT_т} + \right.$$
$$\left. + \frac{w_1d^2}{\gamma^2kT_т} + \frac{0,3d^4}{\gamma^4N_1\tau^*kT_т}\right) + 1. \tag{15}$$

Предположим, что $kT_т > w_1N_1\tau^*$. Тогда в (15) можно отбросить член $(w_1N_1\tau^*/kT_т)^2$. В этом случае f будет иметь минимальное значение при

$$(N_1\tau^*)_{opt} = \left[\frac{d^2}{2\gamma^2w_1}\left(1 + \frac{0,3d^2}{\gamma^2kT_т}\right)\right]^{1/2}. \tag{16}$$

Соответствующее значение f равно

$$f_{min} = \frac{\pi}{n}\frac{d}{d_д}\left[1 + 0,5\left(\frac{d}{d_д}\right)^2\frac{\hbar\omega}{\omega_1 n}\right]^{1/2} + \frac{\pi^2}{6n^2}\left(\frac{d}{d_д}\right)^2 + 1. \tag{17}$$

Здесь $d_д = \frac{2\pi\hbar L}{mVH}$ — диаметр дифракционного пятна. В выражении w_1 отброшен член $\overline{V_y^2}$, поскольку его величина в практически интересных случаях может быть относительно малой. Предположение $kT_т > w_1N_1\tau^*$ при $(N_1\tau^*)_{опт}$ справедливо, если

$$kT_т > \hbar\omega\frac{d}{d_д}\left[1 + 0,3\left(\frac{d}{d_д}\right)^2\frac{\pi^2}{6}\frac{\hbar\omega}{\omega_1 n}\right]^{1/2}. \tag{18}$$

Оценим f_{min} при $d/d_д \approx 3$, $\omega = 2\cdot10^{10}$с^1, $V^2/H^2 \approx 10$, $C \approx 1$ пкФ. Согласно (18) уравнение (17) имеет силу при $kT_т > 10^{-15}$ эрг. Подставив в (17) $kT_т = 3\cdot10^{-15}$ эрг, получим $T_ш \approx 6$ К. При $d/d_д \approx 2$ будет $T_ш \approx 3°$ К.

Если условие $kT_т > w_1N_1\tau^*$ не выполняется, то

$$f \geqslant 1,2\left(\frac{d}{d_д}\right)\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{d}{d_д}\right)^2\left(\frac{\hbar\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^{1/3} + 1. \tag{19}$$

Если $T_т = 4$К, $\frac{d}{d_д} = 3$, то при названных выше значениях других параметров $T_ш \approx 8$К. При $\frac{d}{d_д} = 2$ $T_ш \approx 1,2$К.

Шумовая температура не может быть сделана сколь угодно низкой из-за квантовых ограничений точности измерения энергии резонатора. В схеме без компенсации с однократным пролетом электронов мини-

мальная ошибка определения энергии при однократном испытании равна $\sqrt{n}\hbar\omega$. При этом средняя энергия резонатора за счет действия пучка увеличивается на $\hbar\omega$.

В соответствии с принятым выше определением

$$T_{ш} = \frac{\hbar\omega}{k}. \tag{20}$$

Из (17) при $\frac{d}{d_д} \approx 1$ и $\frac{w_1}{\hbar\omega} \gg \frac{1}{n}$ получаем $f_{min} = 1 + \frac{\pi}{n}$. Следовательно, из (14) найдем

$$T_{ш} = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar\omega}{k}. \tag{21}$$

Расхождение числовых коэффициентов в выражениях (21) и (20) естественно, так как (21) получено в случае гауссовского распределения плотности потока электронов, а (20) связано с дифракцией электронов.

Проведенный анализ показывает большие потенциальные возможности измерения энергии резонаторов СВЧ с помощью пучка электронов. Для реализации высокой чувствительности необходимо разрешить не только проблемы конструирования электронно-оптических систем, но и проблему экранировки от внешних полей.

Авторы благодарят проф. В. Б. Брагинского за ценную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Кривченков В. Д. ЖЭТФ, 1975, 68, вып. 1.
2. Лопухин В. М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М., 1953.

Поступила в редакцию
4.2 1977 г.
Кафедра
физики колебаний