УДК 539.12(075)

Н. Ф. Нелипа
А. Е. Пухов

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА МОДЕЛИ φ^3-ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассматривается вопрос о существовании решений уравнений для функций Грина.

1. В последнее время появился ряд работ, в которых для доказательства существования решений нелинейных интегральных уравнений теоретической физики используются методы функционального анализа. В этих статьях уравнения рассматриваются как операторные уравнения в банаховом пространстве.

Такой подход впервые был применен к уравнениям статистической физики Н. Н. Боголюбовым [1]. Затем с помощью этого метода анализировались нелинейные уравнения квантовой теории поля [2—5], уравнения для рассеяния π-мезонов на статистическом нуклоне [3—6], двойные дисперсионные соотношения [7, 8], уравнения для функций Грина для модели φ^3-взаимодействия [9]. В последней работе рассматривалась двумерная модель и было показано, что принцип сжатых отображений только для нулевой константы связи приводит к существованию решения. Одной из причин такого результата могла быть двумерность модели. Поэтому представляется интересным проанализировать уравнения, соответствующие более реалистической модели.

Цель настоящей заметки найти с помощью принципа сжатых отображений условие существования решения системы уравнений для функций Грина четырхмерной модели φ^3-взаимодействия.

2. Рассмотрим модель, описываемую лагранжианом,

$$L = \frac{\lambda}{3} : \varphi^3,$$

где λ — константа связи.

В отличие от двумерной модели четырехмерная φ^3-модель обладает расходящейся собственно энергетической частью.

Перенормированная зацепляющаяся система уравнений для функций Грина $G(p, q_1, ..., q_n)$ рассматриваемой модели после перехода к евклидовым переменным выглядит так:

$$G(p, q_1, \ldots, q_n) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{q_1, \ldots, q_k}{q_{k+1}, \ldots, q_n}\right) \times$$

$$\times \frac{\sum\left(-p - \sum_{i=1}^{k} q_i, q_1, \ldots, q_k\right)}{(2\pi)^4 (p^2 + m^2)} G\left(p + \sum_{i=1}^{k} q_i, q_{k+1}, \ldots q_n\right) +$$

$$+ 2\lambda \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{p^2+m^2} G(p+q_k, q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_n) + \frac{\delta_{n0}}{p^2+m^2}, \tag{1}$$

$$\sum(q_1, \ldots, q_n) = \lambda \int dp G(p, q_1, \ldots, q_k), \quad (n \geqslant 2), \tag{2}$$

$$\sum(q) = \lambda \int dp (G(p, q) - G(p, 0)) + \lambda\mu. \tag{3}$$

Здесь Σ — массовый оператор; p, q — четырехмерные импульсы. Символически система уравнений (1) может быть записана в виде

$$\varphi = A\varphi, \tag{4}$$

где φ — набор функций $G(p, q_1, \ldots, q_n)$, $\Sigma(q_1, \ldots, q_n)$, A — нелинейный оператор, действующий в линейном пространстве, образуемом набором φ.

Для дальнейшего удобно переписать (1) — (3) в другой форме. Для этого введем новые функции

$$B_n(p, q_1, \ldots, q_n) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{q_1, \ldots, q_k}{q_{k+1}, \ldots, q_n}\right) \times$$

$$\times \frac{\sum\left(-p - \sum\limits_{i=1}^{k} q_i, q_1, \ldots, q_k\right)}{(2\pi)^4 (p^2+m^2)} G\left(p + \sum_{i=1}^{k} q_i, q_{k+1}, \ldots, q_n\right), \tag{5}$$

$$D_1(p, q) = 2\lambda \frac{1}{p^2+m^2} B_0(p+q), \tag{6}$$

$$D_{nk}(p, q_1, \ldots, q_n) = \frac{2\lambda}{p^2+m^2} G_{n-1}(p+q_k, q_1, \ldots, q_n, \ldots, q_n). \tag{7}$$

Тогда вместо (1) получим

$$G_0(p) = \frac{1}{p^2+m^2} + B_0(p), \tag{8}$$

$$G_1(p, q) = D_1(p, q) + B_1(p, q) + \frac{2\lambda}{p^2+m^2} \frac{1}{(p+q)^2+m^2}, \tag{9}$$

$$G_n(p, q_1, \ldots, q_n) = \sum_{k=1}^{n} D_{kn}(p, q_1, \ldots, q_n) + B_n(p, q_1, \ldots, q_n), \tag{10}$$

и вместо (2), (3) имеем

$$\sum\nolimits_n (q_1, \ldots, q_n) = \lambda \int dp B_n(p, q_1, \ldots, q_n) +$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^{n} \int dp D_{nk}(p, q_1, \ldots, q_n), \tag{11}$$

$$\sum\nolimits_1 (q) = \lambda \int dp B_1(p, q) + \lambda \int dp D_1(p, q) - \lambda \int dp B_1(p, 0) -$$

$$- \lambda \int dp D_1(q, 0) + 2\lambda^2 \int \frac{dp}{p^2+m^2} \left[\frac{1}{(p+q)^2+m^2} - \frac{1}{p^2+m^2}\right] + \lambda\mu. \tag{12}$$

Система уравнений (8)—(12) эквивалентна системе (1)—(3) и имеет вид (4), где φ — набор функций G_n, Σ_n, B_n, D_{nk}. Благодаря введению новых функций удается выделить из функции Σ_1 слагаемое, соответствующее расходящейся диаграмме.

Пусть G_n, Σ_n, B_n, D_{nk} — непрерывные функции, нормированные следующим образом:

$$\|B_0(p)\| = \sup\left|\frac{1}{m}(p^2+m^2)(|p|+m)B_0(p)\right|,$$

$$\|B_n(p, q_1, \ldots, q_n)\| = b_n^{-1}\sup\left|\frac{1}{m^3}(p^2+m^2)(|p|+m)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(p+\sum_{i=1}^{n}q_1\right)^2+m^2\right)B_n(p, q_1, \ldots, q_n)\right|,$$

$$\|D_1(p, q)\| = d_1^{-1}\sup\left|\frac{1}{m^3}(p^2+m^2)((p+q)^2+m^2)(|p+q|+m)D_1(p, q)\right|. \tag{13}$$

$$\|D_{nk}(p, q_1, \ldots, q_n)\| = d_n^{-1}\sup\left|\frac{1}{m^4}(p^2+m^2)[(p+q_k)^2+m^2]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(p+\sum_{i=1}^{n}q_i\right)^2+m^2\right]D_{nk}(p, q_1, \ldots, q_n)\right|,$$

$$\|G_0(p)\| = g_0^{-1}\sup|(p^2+m^2)G_0(p)|,$$

$$\|G_n(p, q_1, \ldots, q_n)\| = g_n^{-1}\sup\left|\frac{1}{m^2}(p^2+m^2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(p+\sum^{n}q_i\right)^2+m^2\right]G_n(p, q_1, \ldots, q_n)\right|,$$

$$\|\Sigma_1(p)\| = s_n^{-1}\sup|(|p|+m)^{-1}2m^{-1}\Sigma_1(p)|,$$

$$\|\Sigma_n(q_1, \ldots, q_n)\| = s_n^{-1}\sup\left|\frac{1}{m^3}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}q_i\right|+m\right)\Sigma_n(q_1, \ldots, q_n)\right|.$$

Чтобы превратить набор функций $\varphi=\{G_n, B_n, D_{nk}, \Sigma_n\}$ в нормированное пространство, введем норму [1]

$$\|\varphi\| = \max(\sup_n\|B_n\|, \sup_{n,k}\|D_{n,k}\|, \sup_n\|G_n\|, \sup_n\|\Sigma_n\|). \tag{14}$$

3. Выясним условия, при которых существует решение системы уравнений (8) — (12), используя принцип сжатых отображений (см., например, [10]).

Рассмотрим сначала оборванную систему уравнений для функций Грина, т. е. для $n\leqslant N$. Тогда для существования решения с нормой $\|\varphi\|\leqslant R$ достаточно, чтобы для всех φ_1 и φ_2, таких, что $\|\varphi_1\|\leqslant R$, $\|\varphi_2\|\leqslant R$, выполнялись следующие условия:

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leqslant k\|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$
$$\|A\varphi_1\| \leqslant R, \quad \|A\varphi_2\| \leqslant R, \tag{15}$$

где $0 < k < 1$.

Используя оценки

$$\left|\int \frac{dp}{p^2+m^2}\left(\frac{1}{(p+q)^2+m^2} - \frac{1}{p^2+m^2}\right)\right| \leqslant A\,\frac{|q|}{m},$$
$$\int \frac{d^4l}{(l^2+m^2)\,[(l-k)^2+m^2]\,[(l-p)^2+m^2]} \leqslant \frac{B}{m\,(m+|k|)},$$
$$\int \frac{d^4l}{(l^2+m^2)\,[(l-k)^2+m^2]\,(|l-k|+m)} \leqslant \frac{C}{m+|k|},$$

найдем условие того, что в изучаемом нами случае A есть оператор сжатия:

$$\frac{2}{(2\pi)^4} R \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_{k+1} g_{n-k} < b_n,$$
$$2R^2\lambda/m^2 < d_1,$$
$$2\lambda g_{n-1}/m^2 < d_n, \tag{16}$$
$$1 + R \leqslant g_0 R,$$
$$d_1 + b_1 + 2\lambda/m_2 \leqslant g_1,$$
$$nd_n + b_n \leqslant g_n,$$
$$4\lambda\,(CR\,(d_1+b_1) + \lambda A/m^2) + 2\lambda\mu/m^2 \leqslant s_1 R,$$
$$\lambda\,(Cb_n + Bd_n n) < s_n,$$

где g_n, s_n, b_n, d_n — произвольные постоянные величины.

Условие (16) выполняется для конечного значения константы связи λ, т. е. для «оборванной» системы уравнений решение существует. Для выяснения вопроса о существовании решения полной («не оборванной») системы уравнений (8) — (12) надо перейти в (16) к пределу $n \to \infty$. В этом случае условия (16) выполняются лишь для константы связи λ, равной нулю.

Таким образом, принцип сжатых отображений только при нулевой константе связи приводит к существованию решения системы уравнений (8) — (12).

Специфичным для модели φ^3-взаимодействия является наличие лишь одной расходящейся диаграммы. Именно этим объясняется простота анализа. Для теорий с бесконечным числом расходящихся диаграмм задача существенно усложняется.

В заключение выражаем благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за ценные указания, а также М. Хаяши за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Хацет В. И. ДАН СССР, 1949, 66, 321; Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет В. И. «Теор. и матем. физика», 1969, 1, 251.
2. Warnock R. L. «Phys. Rev.», 1968, 170, 1323.

3. Daniel H. Me, R. L. Warnock R. L. «Nuovo Cim.», 1970, **66A**, 202; «Phys. Rev.», 1969, **180**, 1433.
4. Amatuni A TS. «Nuovo Cim.», 1968, **58 A**, 321.
5. Конно Т., Нелипа Н. Ф. «Теор. и матем. физика», 1972, **12**, 214.
6. Nelipa N. F., Yakovleva G. N. Prceedings of the Triangl Meeting. Bratislava, 1975, p. 385.
7. Aktinson D. «Nucl. Phys.», 1968, **B7**, 395; **B8**, 377.
8. Kupsch J. «Nucl. Phys.», 1969, **B11**, 573; **B12**, 155.
9. Taylor J. G. «J. Math. Phys.», 1966, **7**, 1720.
10. Кантарович Л. В., Акилов Т. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.

Поступила в редакцию
15.3 1977 г.
НИИЯФ