УДК 533.09

П. Крочек (ЧССР)

К ОБОСНОВАНИЮ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ПУЧКА

Теоретически исследуется задача квазилинейной релаксации ограниченного плоскопараллельного пучка. Выведено квазилинейное кинетическое уравнение для ограниченного пучка с учетом зеркального отражения электронов на стенках, которое решено в явном виде в случае моноэнергетического пучка. Показано, что квазилинейная релаксация ограниченного пучка на гидродинамической стадии носит такой же характер, как и релаксация неограниченного пучка. Характерной особенностью релаксации является неоднородность температуры электронов поперек направления движения.

При прохождении электронного пучка через плазму в металлическом волноводе происходит черенковская раскачка электромагнитных колебаний. Вопрос об обратном влиянии возбуждаемых полей на функцию распределения электронов, т. е. квазилинейная релаксация ограниченного пучка, рассматривался в статьях [1, 2] для случая цилиндрического металлического волновода при полном заполнении пучком. Недостатком этих работ, который снижает ценность сделанных в них выводов, является то, что не учитывалось граничное условие для функции распределения на стенках волновода, т. е. фактически не было выяснено, насколько допустимо использование общего квазилинейного уравнения для неограниченного пучка.

В настоящей работе решается граничная задача для квазилинейного кинетического уравнения в двухмерном случае. Рассматривается плоскопараллельный пучок, полностью заполняющий пространство между двумя пластинами из идеального проводника. Предполагается зеркальное отражение электронов на стенках.

Пусть пучок движется вдоль оси z со скоростью $\mathbf{v}_0$ между пластинами, расположенными при $x=0$ и $x=a$. Исследуется возбуждение нерелятивистским пучком потенциальных волн ($\mathbf{E}=-\nabla\Phi$) в плазме, причем плотность пучка n_1 значительно меньше плотности плазмы n_0. Без ограничения общности считается $k_y=0$.

Разбивая функцию распределения электронов пучка на медленно и быстро меняющиеся части, т. е. $f=f_0+f_1$, где $f_1\ll f_0$, получаем для добавки f_1 уравнение

$$\frac{df_1}{dx}+\alpha f_1=-\frac{e}{mv_x}\mathbf{E}(x)\frac{\partial f_0(x)}{\partial \mathbf{v}}, \tag{1}$$

где

$$\alpha=\frac{-i(\omega-k_z v_z)}{v_x}.$$

Обозначая через f_0^+, f_1^+ функции f_0 и f_1 при $v_x>0$, а через f_0^-, f_1^- — при $v_x<0$, решение этого уравнения запишем в виде

$$f_1^{\pm} = \pm \frac{e}{mv_x} \left\{ e^{\pm\alpha x} \int_0^x e^{\alpha\xi} F^{(1)}(\xi)\, d\xi \pm B \right\}. \qquad (2)$$

Константу B легко определить из граничных условий зеркального отражения

$$f_1^{+}(0) = f_1^{-}(0), \quad f_1^{+}(a) = f_1^{-}(a), \qquad (3)$$

$$B = \frac{1}{e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}} \left(e^{-\alpha a} \int_0^a F^{(1)}(\xi)\, d\xi + e^{\alpha a} \int_0^a e^{-\alpha\xi} F^{(2)}(\xi)\, d\xi \right), \qquad (4)$$

где

$$F^{(1)} = E_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} + E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x};$$

$$F^{(2)} = E_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_z}.$$

Тогда уравнение для фоновой функции

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \left\langle \mathbf{E} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0$$

принимает вид

$$\frac{\partial f_0^{\pm}}{\partial t} \pm v_x \frac{\partial f_0^{\pm}}{\partial x} + \hat{L} f_0^{\pm} = 0, \qquad (5)$$

где

$$\hat{L} f_0 = \frac{\partial}{\partial v_x} \frac{eE_x}{mv_x} \left\{ e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha\xi} F^{(1)}(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\alpha x}}{e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}} \left(e^{-\alpha a} \int_0^a e^{\alpha\xi} F^{(1)}(\xi)\, d\xi + e^{\alpha a} \int_0^a e^{-\alpha\xi} F^{(2)}(\xi)\, d\xi \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{eE_z}{mv_x} \left\{ e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha\xi} F^{(1)}(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\alpha x}}{e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}} \left(e^{-\alpha a} \int_0^a e^{\alpha\xi} F^{(1)}(\xi)\, d\xi + e^{\alpha a} \int_0^a e^{-\alpha\xi} F^{(2)}(\xi)\, d\xi \right) \right\}. \qquad (6)$$

Уравнение (5) является общим уравнением квазилинейной релаксации при зеркальном отражении. Явный вид решения этого уравнения можно найти в случае первоначального моноэнергетического пучка, когда неустойчивость носит гидродинамический характер, а поэтому $\delta \gg k_x v_x$, $\delta \gg k_z \Delta v_z$ при $\Delta v_z = v_z - v_0$, где δ — инкремент нарастания неустойчивости. В этом случае уравнение (5) можно свести к уравнению диффузии в пространстве скоростей с коэффициентами, зависящими от координат, как от параметра, фактически пренебрегая процессами переноса в пучке (в нулевом приближении по параметру моноэнергетичности $\beta = \frac{k_x v_x}{\omega - k_z v_0} \ll 1$).

Сделав замену переменной $y=k_x x$, $k_x>0$, при $\beta\to 0$ на основе асимптотических оценок интервалов, входящих в выражение для f_1 (используя метод перевала без седловой точки), можно записать

$$f_1^- = -i\frac{e}{m}\frac{1}{\omega-k_z v_0}\left(E_z(x)\frac{\partial f_0^-(x)}{\partial v_z}-E_x(x)\frac{\partial f_0^-(x)}{\partial v_x}\right). \tag{7}$$

Отсюда для f_0^- получаем уравнение

$$\frac{\partial f_0^-}{\partial\tau}=\sum_{k_z}\frac{1}{2}\frac{e^2}{m^2}\operatorname{Im}\frac{1}{\omega-k_z v_0}\left\{E_x^2\frac{\partial^2 f_0^-}{\partial v_x^2}+E_z^2\frac{\partial^2 f_0^-}{\partial v^2}\right\}, \tag{8}$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial f_0^-}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 f_0^-}{\partial v_x^2}+\gamma^2\frac{\partial^2 f_0^-}{\partial v_z^2}. \tag{9}$$

Здесь

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{e^2}{m^2}\frac{\sqrt{3}}{4|\delta|}E^2\frac{k_x^2}{k_z^2},$$

причем

$$\omega-k_z v_0=i\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right)|\delta|,\quad |\delta|=\left(\frac{n_1}{2n_0}\right)^{1/3}\omega_0,$$

$k_z=\frac{\omega_0}{v_0}$, $\omega_0=\frac{4\pi e^2 n_0}{m}$, $\gamma=\frac{k_z}{k_x}=\frac{\omega_0 a}{v_0\pi}$ — параметр плотности.

При начальной функции $f_0|_{\tau=0}=n_1\delta(v_x)\delta(v_z-v_0)$ уравнение (9) имеет следующее решение:

$$f_0^-=\frac{n_1}{4\pi\tau\gamma}e^{-\frac{v_x^2}{4\tau}-\frac{(v_z-v_0)^2}{4\gamma^2\tau}}=n_1\frac{m}{\pi\sqrt{T_x}\sqrt{T_z}}e^{-\frac{mv_x^2}{T_x}-\frac{m(v_z-v_0)^2}{T_z}}, \tag{10}$$

где

$$T_x=4m\tau,\quad T_z=\gamma^2 T_x.$$

Решение уравнения поля

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}=0 \tag{11}$$

при учете граничных условий $E_z|_{x=0,a}=0$ записываются в виде

$$E_z=Ci\sin k_x x,\quad E_x=C\frac{k_x}{k_z}\cos k_x x, \tag{12}$$

где $k_x=\frac{\pi n}{a}$, C — произвольная постоянная. Учитывая это обстоятельство, можно показать, что

$$f_0^+=f_0^-(a-x;\ -v_x)=f_0^-. \tag{13}$$

Найденное решение (12) и (13) представляет распределение Максвелла с анизотропной температурой. Температуры T_x и T_z зависят от координаты x и растут линейно с временем. Характерное время квазилинейной релаксации на стадии гидродинамической неустойчивости определяет время $\tau_{\max}$, за которое разброс по поперечным или продольным скоростям достигает такой величины, что нарушается одно из условий $|\delta| > k_z v_z$, $|\delta| > k_x v_x$.

Отсюда находим

$$\tau_{x\,\max} \sim \frac{\delta^2}{k_x^2} \sim \frac{\delta^2}{k_z^2}\gamma^2, \quad \tau_{z\,\max} \sim \frac{\delta^2}{k_z^2}\gamma^{-2},$$
$$\frac{\tau_{z\,\max}}{\tau_{x\,\max}} \sim \frac{1}{\gamma^4}. \tag{14}$$

В плотной плазме ($\gamma > 1$) раньше нарушается условие моноэнергетичности по v_z и $\tau_{\max} \sim \frac{\delta^2}{\gamma^2 k_z^2}$. В редкой плазме ($\gamma < 1$) $\tau_{\max} \sim \frac{\delta^2}{k_z^2}\gamma^2$.

При релаксации происходит разогрев пучка до $T_{z\,\max}$ и $T_{x\,\max}$, причем

$$T_{x\,\max} \approx \frac{1}{\gamma^2} T_{z\,\max}, \quad T_{z\,\max} \sim \left(\frac{n_1}{2n_0}\right)^{2/3} m v_0^2 \begin{cases} 1 & \text{при } \gamma > 1, \\ \gamma^4 & \text{при } \gamma < 1. \end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, при $\gamma \gg 1$ характер релаксации почти одномерный вдоль пучка ($T_z \gg T_x$), происходит преимущественно продольный разогрев температуры пучка пока не нарушается условие $\delta > k_z v_z$. При $\gamma \ll 1$, наоборот, происходит поперечный разогрев ($T_x \gg T_z$). Температуры T_x и T_z неоднородны по x.

Можно показать, что энергия, теряемая пучком, в основном расходуется на энергию возбуждаемых колебаний, и лишь незначительная часть превращается в тепловую энергию частиц пучка. Исходя из уравнения

$$\frac{d\,|E_k|^2}{dt} = \frac{d\,|E_k|^2}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt} = 2\,\mathrm{Re}\,\delta\,|E_k|^2 \tag{16}$$

можно определить долю первоначальной энергии пучка, теряемой на гидродинамической стадии развития пучковой неустойчивости:

$$\frac{\sum\limits_{k_x} |E_k|^2}{n_1 m v_0^2} \approx \left(\frac{n_1}{2n_0}\right)^{1/3} (1+\gamma^2)\frac{1}{\gamma^2} \begin{cases} 1 & \gamma > 1, \\ \gamma^4 & \gamma < 1. \end{cases} \tag{17}$$

Пучок на стадии гидродинамической неустойчивости теряет лишь незначительную часть своей энергии, которая в основном превращается в энергию электромагнитных колебаний.

Из полученных выше результатов следует, что квазилинейная релаксация моноэнергетического пучка в волноводе с зеркальным отражением электронов на стенках носит тот же характер, что и в неограниченной плазме на гидродинамической стадии. Существенной особенностью является неоднородность температуры электронов пучка поперек направления движения электронов пучка.

В результате размытия пучка устанавливается максвелловское распределение с анизотропной температурой[1], зависящей от x. В плот-

---

[1] Наличие анизотропии температуры в принципе может привести к возникновению анизотропной неустойчивости в системе. Этот вопрос требует специального рассмотрения.

ной плазме происходит преимущественно разогрев продольной температуры ($T_{\parallel} \gg T_{\perp}$), в редкой, наоборот, $T_{\parallel} \ll T_{\perp}$. Пучок теряет малую долю первоначальной энергии на гидродинамической стадии, которая идет в основном на возбуждение электромагнитных колебаний.

В заключение автор выражает благодарность проф. А. А. Рухадзе за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аронов Б. И., Рухадзе А. А., Чоговадзе М. Е. ЖТФ, 1972, 42, вып. 6, 1097.
2. Горбатенко М. Ф., Шапиро В. Д. В сб.: Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. Киев, 1965.

Поступила в редакцию
4.6 1977 г.

Кафедра
электроники