УДК 53:51

Е. В. Именитова

О СИНТЕЗЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СОГЛАСУЮЩИХ СИСТЕМ

В работе продемонстрирована возможность расчета задачи синтеза согласующих сред для непрерывного распределения параметров. Разработанный алгоритм позволяет выбрать толщину согласующего слоя и кривую изменения в нем показателя преломления.

В данной работе рассматривается задача просветления в полосе частот границы раздела двух сред с различными волновыми сопротивлениями. Эта задача встречается в разных областях физики: акустике, радиофизике, оптике.

Будем рассматривать случай распространения плоской волны в направлении, перпендикулярном границе раздела сред. Совместим с этим направлением координатную ось x. Пусть между средами помещен неоднородный плоскопараллельный согласующий слой с толщиной x_0, показателем преломления $n(x)$ и кусочно-непрерывной функцией x. Пусть, далее, процесс распространения плоской волны вдоль оси x описывается волновым уравнением:

$$u''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x) u(x) = 0, \tag{1}$$

где $u(x)$ — амплитуда волны, ω — циклическая частота, c — скорость распространения волны.

Коэффициент отражения R от границы раздела с согласующим слоем может быть выражен через фундаментальную систему решений уравнения (1) в согласующем слое [1] и является, таким образом, функцией ω, $n(x)$ и x_0.

$$R = R[n(x),\ x_0,\ \omega] = \frac{\Phi - 2n_1 n_2}{\Phi + 2n_1 n_2}, \tag{2}$$

где

$$\Phi = \Phi(x_0) = n_1^2 \psi'^2(x_0) + n_2^2 \varphi^2(x_0) + \frac{1}{k^2} \varphi'^2(x_0) + k^2 n_1^2 n_1^2 \psi^2(x_0), \tag{3}$$

$$k = \frac{\omega}{c},$$

n_1 — показатель преломления среды, из которой падает волна, n_2 — показатель преломления среды, в которую падает волна, φ и ψ — решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Для оценки качества просветления в полосе частот $[\omega_1, \omega_2]$ введем функционал

$$F[n(x), x_0] = \int_{\omega_1}^{\omega_2} v(\omega)\{R[n(x), x_0, \omega] - \widehat{R}(\omega)\}\,dx. \tag{5}$$

Здесь $v(\omega)$ — весовая функция, $\widehat{R}(\omega)$ — желаемый коэффициент отражения.

Синтез согласующей системы сводится теперь к поиску минимума функционала (5) на некотором допустимом множестве функций $n(x)$ и x_0. Минимизацию функционала (5) будем осуществлять методом градиентного спуска. Для построения алгоритма минимизации нам потребуются выражения для градиента функционала F по $n(x)$ и x_0.

Аналитическое выражение для градиента F по $n(x)$ имеет вид [1]:

$$f(x) = 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} \{R[\omega, n(x)] - \widehat{R}(\omega)\} f_1[\omega, n(x)]\, v(\omega)\, d\omega, \tag{6}$$

где

$$f_1[\omega, n(x)] = -4\frac{\omega^2}{c^2}[1 - R(\omega)]\sqrt{R(\omega)}\, n(x) \left\{\varphi(x)\psi(x)\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sin\alpha\left[\frac{\omega}{c} n_1\psi^2(x) - \frac{c}{\omega n_1}\varphi^2(x)\right]\right\},$$

где α — фазовый сдвиг при отражении [1].

Получим первую и вторую производную функционала (5) по x_0. Для этого разложим его по степеням δx, где δx — приращение толщины слоя. Показатель преломления добавляемого слоя толщины $\delta x > 0$ будем считать постоянным и равным n.

Как нетрудно проверить, фундаментальная система решений, удовлетворяющая граничным условиям (4), при $x = x_0 + \delta x$ — $\varphi(x_0 + \delta x)$ и $\psi(x_0 + \delta x)$ выражается через $\varphi(x_0)$, $\psi(x_0)$, $\varphi'(x_0)$ и $\psi'(x_0)$.

Раскладывая $\varphi(x_0 + \delta x)$, $\varphi'(x_0 + \delta x)$, $\psi(x_0 + \delta x)$ и $\psi'(x_0 + \delta x)$ по степеням δx и подставляя их в (3), получаем разложение Φ по δx. Далее, из (2) определяется разложение R по δx и затем разложение функционала (5).

Отсюда для первых производных коэффициента отражения R и функционала F по δx получаются следующие выражения:

$$R_1 = \frac{\partial R}{\partial(\delta x)} = \frac{8n_1n_2(n_2^2 - n^2)(\varphi\varphi' + k^2n_1^2\varphi\varphi')}{(\Phi + 2n_1n_2)^2}. \tag{7}$$

Функции φ, ψ, их производные и Φ берутся при $x = x_0$

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial(\delta x)} = 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} R_1(R - R(\omega))\, v(\omega)\, d\omega. \tag{8}$$

Выражения для вторых производных R и F по δx:

$$R_2 = \frac{\partial^2 R}{\partial(\delta x)^2} = \frac{4n_1n_2}{(\Phi + 2n_1n_2)^3}\left\{(n^2 - n_2^2)(\varphi^2n^2k^2 - \varphi'^2 + \psi'^2k^2nn_1 - \psi^2k^2n_1^2) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(\Phi + 2n_1n_2)}[2(n_2^2 - n^2)(\varphi\varphi'^2 + k^2n_1^2\psi\psi')]^2\right\}, \tag{9}$$

$$F_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial (\delta x)^2} = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \{R_2 [R - \hat{R}(\varphi)] v(\omega) + R_1^2 v(\omega)\} d\omega. \qquad (10)$$

Как видно из приведенных выше выражений, все производные функционала (5) так же, как и коэффициент отражения R, выражаются через фундаментальную систему решений уравнения (1). Таким образом, они могут быть легко найдены попутно с вычислением коэффициента отражения R и функционала (5), что очень удобно для построения алгоритма минимизации.

Алгоритм минимизации состоит в следующем.

Задаются начальная толщина слоя x_0 и на достаточно мелкой сетке по x (до 200 точек) начальное распределение показателя преломления. По стандартной программе находится фундаментальная система решений уравнения (1) и рассчитываются начальные значения коэффициента отражения R, функционала F и градиента функционала по $n(x)$. Сначала проводится минимизация по $n(x)$ методом градиентного спуска [2]. При этом учитываются ограничения на допустимые значения $n(x)$: $n_{\min} \leqslant n(x) \leqslant n_{\max}$, где $n_{\min}$ и $n_{\max}$ определяются выбранными при синтезе материалами.

Новое значение показателя преломления слоя $n(x)$ определяется следующим образом:

$$n(x) = \begin{cases} n_{\min}, & n(x) - \delta f(x) < n_{\min} \\ n(x) - \delta f(x) & \\ n_{\max}, & n(x) - \delta f(x) > n_{\max}, \end{cases}$$

где $f(x)$ определяется соотношением (6), а шаг δ в программе выбирается автоматически по некоторому начальному шагу δ_0 из условия минимума функционала F по данному направлению $f(x)$.

После того как определен минимум функционала по направлению $f(x)$, происходит минимизация функционала по толщине слоя x_0. Как нетрудно видеть, формулы (7), (8) верны и для $\delta x < 0$, если положить n равным $n(x_0)$ — левому предельному значению функции $n(x)$ в точке x_0. Сначала рассчитывается значение F_1 при $n = n(x_0)$. Если $F_1 > 0$, то функционал должен убывать при уменьшении толщины слоя. Следовательно, в этом случае толщину слоя нужно последовательно уменьшать до нахождения минимума функционала. Если $F_1 < 0$, то толщину слоя следует увеличивать.

Быстрейшее изменение функционала с изменением толщины слоя x_0 происходит в случае, когда разница $n^2 - n_2^2$ принимает максимальное значение. Следовательно, показатель преломления наращиваемого участка δx полагается равным $n_{\max}$ или $n_{\min}$. Выбор того или иного значения n определяется знаком F_1 (F_1 должно быть меньше нуля, так как в этом случае функционал убывает с увеличением толщины).

Выбор шага δx зависит от знака F_2. Если $F_2 > 0$, то функционал представляет собой выпуклую функцию переменной x в окрестности точки x_0. Тогда движение по x происходит с шагом δx, который определяется следующим образом.

Разложим функционал F в точке $x_0 + \delta x$ в ряд по δx: $F(x_0 + \delta x) = F_0 + F_1 \delta x + F_2 \delta^2 x + \ldots$, где $F_0 = F(x_0)$, а F_1 и F_2 определяются соотношениями (8) и (10).

При экстремальном значении функционала выполняется

$$\frac{\partial F}{\partial (\delta x)} = F_1 + 2F_2 \delta x = 0.$$

Следовательно,

$$\delta x = -\frac{F_2}{2F_1}. \tag{11}$$

Если $F_2<0$, то функционал представляет собой вогнутую функцию переменной x в окрестности точки x_0. В этом случае первый шаг δx выбирается больше $|\delta x|$, определяемого формулой (11), затем оптимальный шаг выбирается методом последовательного деления отрезка δx_1.

По этому алгоритму составлена программа для ЭВМ БЭСМ-4 и рассчитано просветление границы раздела сред с показателями преломления $n_1=1$, $n_2=2{,}5$ в частотном интервале с отношением граничных значений 1 : 2. При расчете интервал возможных изменений показателя преломления в просветляющем слое был ограничен минимальным значением 1,32 и максимальным 4. Предполагалось, что во всем рассматриваемом диапазоне частот желаемый коэффициент отражения равен нулю, а весовая функция — единице. Минимизация осуществлялась при двух различных начальных распределениях коэффициента преломления (рис. 1). Расчет показал, что в указанном интервале частот коэффициент отражения значительно снизился (рис. 2), а функционал уменьшился на два порядка. Для сравнения отметим, что коэффициент отражения от этой границы раздела без просветления превышает 18%.

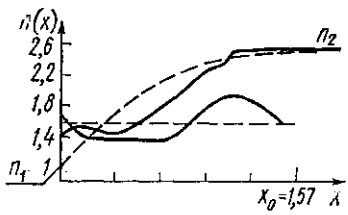

Рис. 1. Распределение показателя преломления в согласующем слое до (штриховые линии) и после (сплошные линии) минимизации функционала

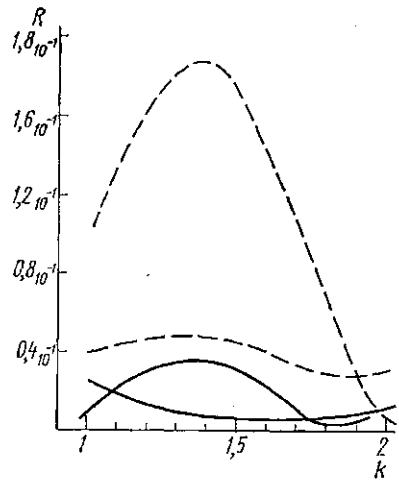

Рис. 2. Зависимость коэффицента отражения от частоты до (штриховые линии) и после (сплошные линии) минимизации функционала

Функционал, который мы рассматриваем, является не выпуклым и, как показывает предварительный численный анализ, обладает большим количеством локальных минимумов. В настоящее время в математике не существует ни одного общего метода, позволяющего найти глобальный минимум невыпуклого функционала, когда количество локальных минимумов велико. В работе ставилась задача отыскать достаточно «глубокий» локальный минимум, который обеспечивает достаточно хорошее просветление в заданной полосе частот. При этом естественно решение задачи может быть не единственным, но это как раз удобно для целей практики, поскольку позволяет выбрать распределение $n(x)$ наиболее легко практически реализуемое.

Таким образом, продемонстрирована возможность расчета задачи синтеза согласующих сред не только для слоистого, но и для непрерывного распределения параметров. Разработанный алгоритм позволяет выбрать толщину согласующего слоя и кривую изменения в нем показателя преломления. Возможность практической реализации таких слоев показана в ряде работ, например [3]. Причем кривую эту при необходимости можно аппроксимировать слоистым распределением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонравов А. В. «Оптика и спектроскопия», 1977, **42**, 6, 1183.
2. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. М., 1973.
3. Fujiwara S. JOSA, 1963, **53**, 1317.

Поступила в редакцию
24.5 1977 г.
Кафедра
акустики