УДК 535.14:621.378

В. Ф. Королев

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Дается вывод формулы для мощности индуцированного излучения ангармонического осциллятора в сильном электромагнитном поле. Показано, что в случае, когда индуцированное радиационное время жизни много меньше среднего времени между двумя столкновениями молекул, достигается предельная мощность излучения такого осциллятора.

В работе [1] дан вывод формулы для мощности индуцированного излучения ангармонического осциллятора, находящегося во внешнем электромагнитном поле. При этом в качестве коэффициента затухания γ осциллятора выбиралась величина, обратная среднему времени между двумя столкновениями молекул τ. Однако при достаточно сильных полях следует учитывать, что величина затухания начинает зависеть от амплитуды внешнего электромагнитного поля. В предлагаемой работе коэффициент затухания $\overset{*}{\gamma}_{nm}$ берется равным сумме

$$\overset{*}{\gamma}_{nm} = \gamma + \gamma_{nm} = \frac{1}{\overset{*}{\tau}_{nm}}, \tag{1}$$

где $\gamma = \frac{1}{\tau}$, а γ^2_{nm} согласно [2] имеет вид

$$\gamma^2_{nm} = \frac{E_0^2 |D_{nm}|^2}{\hbar^2} = \frac{1}{\tau^2_{nm}}, \tag{2}$$

где E_0 — амплитуда электромагнитной волны внешнего поля, $|D_{nm}|^2$ — квадрат матричного элемента для перехода между двумя уровнями W_n и W_m.

В работе [1] на основе принципа соответствия между классической и квантовой теорией излучения получена формула для мощности индуцированного излучения (поглощения) при квантовом переходе между двумя уровнями W_n и W_m квантовой системы, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем.
Эта формула имеет вид

$$P_{nm} = \frac{f_{nm} e^{*2} E_0^2 \omega^2 \overset{*}{\gamma}_{nm}}{2MZ^2_{nm}}, \tag{3}$$

где f_{nm} — сила осциллятора для перехода $W_n \rightleftarrows W_m$, e^* и M — эффективный заряд и приведенная масса частицы, ω — частота внешнего поля, а Z^2_{nm} определяется выражением

$$Z^2_{nm} = (\omega^2_{nm} - \omega^2)^2 + \omega^2 \overset{*2}{\gamma}_{nm}. \tag{4}$$

При переходе с уровня определяемого колебательным квантовым числом v, на уровень $v+1$ будет происходить поглощение излучения, мощность которого определится как

$$P_{v,v+1} = \frac{\omega^2 e^{*2} E_0^2}{2M} \frac{\gamma^*_{v,v+1} \cdot f_{v,v+1}}{Z^2_{v,v+1}}. \tag{5}$$

При переходе с уровня v на уровень $v-1$ будет происходить излучение, мощность которого определится как

$$P_{v,v-1} = \frac{\omega^2 e^{*2} E_0^2}{2M} \frac{\gamma^*_{v,v-1} \cdot f_{v,v-1}}{Z^2_{v,v-1}}. \tag{6}$$

Результирующая мощность, которой обменивается волна с осциллятором, равна сумме $P_{v,v+1}$ и $P_{v,v-1}$

$$P = \frac{\omega^2 e^{*2} E_0^2}{2M} \left\{ \frac{\gamma^*_{v,v+1} \cdot f_{v,v+1}}{Z^2_{v,v+1}} + \frac{\gamma^*_{v,v-1} \cdot f_{v,v-1}}{Z^2_{v,v-1}} \right\}. \tag{7}$$

Матричные элементы для переходов $v \to v+1$ и $v \to v-1$ берутся в приближении гармонического осциллятора

$$|D_{v,v+1}|^2 = \frac{e^{*2}\hbar (v+1)}{2M\omega_0}, \tag{8}$$

$$|D_{v,v-1}|^2 = \frac{e^{*2}\hbar v}{2M\omega_0}. \tag{9}$$

Если излучающие частицы распределены хаотически по пространству, то сила осциллятора для перехода между двумя произвольными уровнями определяется формулой

$$f_{nm} = \frac{2M\omega_{nm} |D_{nm}|^2}{3e^{*2}\hbar}. \tag{10}$$

Силы осцилляторов для переходов $v \to v+1$ и $v \to v-1$ с учетом (8) и (9) равны

$$f_{v,v+1} = \frac{v+1}{3}, \tag{11}$$

$$f_{v,v-1} = -\frac{v}{3}. \tag{12}$$

Величины $\gamma^2_{v,v+1}$ и $\gamma^2_{v,v-1}$ определяются как

$$\gamma^2_{v,v+1} = \frac{E_0^2 e^{*2} (v+1)}{2\hbar M\omega_0}, \tag{13}$$

$$\gamma^2_{v,v-1} = \frac{E_0^2 e^{*2} v}{2\hbar M\omega_0}. \tag{14}$$

Выражение (7) с учетом (11) и (12) может быть преобразовано к виду

$$P = \frac{e^{*2} E_0^2 \omega^2 \gamma^*_{v,v-1}}{6M} \left\{ \frac{v+1}{Z^2_{v,v+1}} - \frac{v}{Z^2_{v,v-1}} \right\} + \frac{e^{*2} E_0^2 \omega^2 \gamma_{v,v-1} (v+1)}{12Mv Z^2_{v,v+1}}. \tag{15}$$

При выводе (15) было использовано то, что $\frac{\gamma_{v,v+1}}{\gamma_{v,v-1}} = \sqrt{\frac{v+1}{v}} \simeq 1 + \frac{1}{2v}$. Частоты $\omega_{v,v+1}$ и $\omega_{v,v-1}$ для ангармонического осциллятора могут быть получены из выражений для уровней энергии ангармонического осциллятора

$$W_v = \hbar\omega_0 \left(v + \frac{1}{2}\right) - \hbar\omega_0 x_e \left(v + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{16}$$

Эти частоты по абсолютной величине определяются выражениями

$$\omega_{v,v+1} = \frac{W_{v+1} - W_v}{\hbar} = \omega_0 \{1 - 2x_e(v+1)\}, \tag{17}$$

$$\omega_{v,v-1} = \frac{W_v - W_{v-1}}{\hbar} = \omega_0 \{1 - 2x_e v\}. \tag{18}$$

С учетом (17) и (18) выражение (15) приводится к виду

$$P = \frac{e^{*2}E_0^2\omega^2\gamma^*_{v,v-1}}{6MZ^2_{v,v+1}} \left[1 + \frac{8\omega_0^2 x_e v\,[1 - x_e(2v+1)]}{Z^2_{v,v-1}} \times \right.$$
$$\times \{\omega_0^2[1 - 2x_e(1 - x_e)(2v+1) + 4x_e^2 v^2] - \omega^2\} -$$
$$\left. - \omega^2\gamma^2_{v,v-1}\left(1 + \frac{\gamma}{\gamma_{v,v-1}} + \frac{1}{4v}\right)\right] + \frac{e^{*2}E_0^2\omega^2\gamma_{v,v-1}}{12MZ^2_{v,v+1}} \cdot \frac{v+1}{v}. \tag{19}$$

Пусть $v \sim 10$—20. В этом случае $\omega_{v,v+1}$ и $\omega_{v,v-1}$ можно положить равными

$$\omega_{v,v-1} = \omega_{v,v+1} \equiv \omega_v = \omega_0\{1 - 2x_e v\}. \tag{20}$$

Кроме того, в этом случае

$$\gamma^{*2}_{v,v-1} = \gamma^{*2}_{v,v+1} \equiv \gamma_v^{*2} = (\gamma + \gamma_v)^2 = \frac{1}{\tau_v^{*2}}, \tag{21}$$

где γ_v^2 определяется выражением

$$\gamma_v^2 = \frac{1}{\tau_v^2} = \frac{e^{*2}E_0^2 v}{2\hbar M\omega_0}. \tag{22}$$

Учитывая (20) и (21), величины $Z^2_{v,v-1}$ и $Z^2_{v,v+1}$ можно положить равными

$$Z^2_{v,v-1} = Z^2_{v,v+1} \equiv Z_v^2 = \omega^2[4(\omega_v - \omega)^2 + \gamma_v^{*2}]. \tag{23}$$

В (23) учтено, что $(\omega_v^2 - \omega^2)^2 = (\omega_v + \omega)^2(\omega_v - \omega)^2 \approx 4\omega^2(\omega_v - \omega)^2$. Если обозначить

$$\alpha^* = 2\tau_v^*(\omega_v - \omega), \tag{24}$$

то выражение для мощности P может быть записано в виде

$$P = \frac{e^{*2}E_0^2\tau_v^*}{6M(1 + \alpha^{*2})}\left\{1 + \frac{8\omega_0 x_e v\tau_v^*\alpha^* - \frac{\tau_v^*}{\tau_v}}{1 + \alpha^{*2}} + \frac{\tau_v^*}{2\tau_v}\right\}. \tag{25}$$

Если $\frac{\tau_v}{\tau} \ll 1$, то выражение для мощности будет иметь вид

$$P = \frac{e^{*2}E_0^2\tau_v}{6M(1+\alpha^{*2})}\left\{\frac{3}{2} + \frac{8\omega_0 x_e v\tau_v\alpha^* - 1}{1+\alpha^{*2}}\right\}. \quad (26)$$

Из формулы (26) видно, что индуцированное излучение превышает поглощение, если второй член в фигурной скобке отрицателен и по абсолютной величине больше 3/2. Второй член в фигурной скобке имеет максимальное отрицательное значение при

$$\alpha = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + 1}, \quad (27)$$

где

$$A = \frac{1}{4\omega_0 x_e v\tau_v}. \quad (28)$$

Проведем оценку величины A. Чтобы удовлетворить условию $\frac{\tau_v}{\tau} \ll 1$, вплоть до давлений ~ 10—20 атм (т. е. когда величина τ имеет порядок 10^{-11} с), τ_v должно быть $\sim 10^{-12}$ с. Однако τ_v не может быть слишком малым, так как при $\tau_v \sim 10^{-14}$ с уширение линий будет того же порядка, что и ω_0. Поэтому будем считать, что τ_v не менее чем 10^{-13} с. При $\tau_v = 10^{-12}$ с, $\omega_0 = 10^{14}$ Гц, $x_e = 10^{-2}$, $v = 10$ для A получаем значение

$$A = 2{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Для таких значений τ_v величиной $A/2$ в (27) по сравнению с 1 можно пренебречь, поэтому $\alpha = -1$. Подставляя $\alpha = -1$ в (26), получаем

$$P = \frac{e^{*2}E_0^2\tau_v}{12M}\{1 - A^{-1}\}. \quad (29)$$

Так как для выбранных значений величин, входящих в (29), $A \ll 1$, то единицей в фигурной скобке выражения (29) можно пренебречь. Выражение для мощности в этом случае можно записать в виде

$$P = -\frac{e^{*2}E_0^2\tau_v^2\omega_0 x_e v}{3M}. \quad (30)$$

Учитывая выражение для τ_v^2, а также считая, что на уровне v находится N_v молекул, выражение для мощности можно записать в виде

$$P = \frac{2}{3}\hbar\omega_0^2 x_e N_v. \quad (31)$$

Проведем оценку величины P для молекулы CO. Величины ω_0 и x_e имеют следующие значения: $\omega_0 = 4{,}1 \cdot 10^{14}$ Гц, $x_e = 6 \cdot 10^{-3}$. Если число молекул на уровне v равно, например, 10^8 молекул/см^3, мощность излучения такой системы будет равна (записываем без знака минус)

$$P = 6{,}7 \text{ Вт/см}^3.$$

Проведенный расчет и анализ полученных выражений позволяют рассчитывать мощность излучения системы ангармонических осцилляторов, находящихся в сильном электромагнитном поле. Подобные выражения

могут оказаться полезными при расчете и анализе взаимодействия молекулярных систем с внешним электромагнитным полем.

В заключение приношу глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук А. И. Осипову за постоянное внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев В. Ф. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астрон.», 1976, 17, № 5, 515.
2. Басов Н. Г., Крохин О. Н., Попов Ю. М. «Успехи физических наук», 1960, 72, 161.

Поступила в редакцию
9.6 1977 г.
Кафедра
радиофизики СВЧ