УДК 539.101

В. Ч. Жуковский

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрено излучение релятивистского заряда, движущегося в неоднородном ведущем магнитном поле достаточно гладкой формы. Найдена зависимость поляризационно-угловых характеристик излучения от величины вертикального отклонения скорости от равновесного значения. Показано, что явная зависимость интенсивности излучения от радиального отклонения скорости в рассмотренном приближении отсутствует.

Ведущее магнитное поле циклических ускорителей и накопителей электронов и позитронов пространственно неоднородно, что объясняется его фокусирующими свойствами, а также различными конструктивными искажениями его симметричной формы. Эта неоднородность должна оказывать влияние на угловое распределение и поляризационные свойства синхротронного излучения движущихся в таком поле заряженных частиц. Действительно, излучение релятивистского заряда формируется на малом участке траектории с угловыми размерами порядка $\gamma^{-1}=m/E\ll 1$ (E — энергия заряда, m — его масса). При этом конус излучения имеет угловые размеры также порядка γ^{-1}, а его ось направлена вдоль вектора скорости частицы. Поэтому угловое распределение излучения заряда, возникающего на заданном малом участке его траектории, целиком определяется соотношением угловых размеров конуса излучения γ^{-1} и величиной отклонения скорости $|\delta\mathbf{v}|/v$, связанного с локальной неоднородностью магнитного поля. Поскольку эти величины обычно имеют сравнимый порядок, то угловое распределение существенно отличается от случая однородного поля [1].

В то же время спектральное распределение излучения зависит от локального радиуса кривизны траектории в области формирования, который лишь незначительно искажается за счет неоднородности поля, что приводит к небольшим поправкам в спектре порядка $(|\delta\mathbf{v}|/v)^2$ по сравнению с единицей. Поэтому для спектра излучения с точностью до величин $(|\delta\mathbf{v}|/v)^2\ll 1$ должны быть применимы формулы, полученные в случае однородного поля [1].

Влияние искажения круговой траектории заряда на свойства синхротронного излучения исследовалось ранее в частных случаях для некоторых моделей слабофокусирующего магнитного поля (см., например, [2, 3, 4]). В настоящей работе развивается предложенный нами метод [5] расчета излучения с учетом произвольной локальной неоднородности ведущего магнитного поля.

Рассмотрим заряд, движущийся в неоднородном постоянном магнитном поле. Скорость заряда, точно так же как и его энергия, должны оставаться постоянными

$$|\dot{\mathbf{r}}| = v = \text{const}, \tag{1}$$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m\gamma = \text{const}.$$

Движение заряда можно разделить на два слагаемых — движение по траектории, представляющей собой окружность, и отклонение от нее

$$\mathbf{r}(\Phi) = \mathbf{r}_s(\Phi) + \delta\mathbf{r}(\Phi), \tag{2}$$

где $|\mathbf{r}_s| = R$ — радиус окружности, Φ — азимутальный угол. Соответственно для скорости имеем

$$\mathbf{v}(\Phi) = \mathbf{v}_s(\Phi) + \delta\mathbf{v}(\Phi), \tag{3}$$

причем $\mathbf{v}_s \perp \mathbf{r}_s$. Будем в дальнейшем предполагать, что, как это обычно имеет место в ускорителях, отклонения от кругового движения, связанные с неоднородностью поля, малы, т. е.

$$\frac{|\delta\mathbf{r}|}{R} \sim \frac{|\delta\mathbf{v}|}{v_s} \sim \left|\frac{\partial\,\delta\mathbf{v}}{\partial\Phi}\right| \ll 1. \tag{4}$$

Введем цилиндрические проекции скорости $\mathbf{v}(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_\varphi, \mathbf{v}_z)$ в системе координат с осью z, проходящей через центр невозмущенной круговой траектории перпендикулярно ее плоскости. Поскольку скорость невозмущенного движения $\mathbf{v}_s$ имеет трансверсальное направление, то

$$\mathbf{v}_r = \delta v_r,\ \mathbf{v}_\varphi = \mathbf{v}_s + \delta\mathbf{v}_\varphi,\ \mathbf{v}_z = \delta\mathbf{v}_z. \tag{5}$$

В силу постоянства скорости (1) получим

$$v^2 = v_s^2 + 2v_s\,\delta v_\varphi + (\delta v_r)^2 + (\delta v_z)^2 = \text{const}. \tag{6}$$

Поскольку δv_φ имеет второй порядок малости, т. е. $\delta v_\varphi \sim (\delta v_r)^2 \sim (\delta v_z)^2$, то отсюда следует, что с точностью до линейных членов

$$\dot{\Phi} = \omega_0(1 - \delta r/R), \tag{7}$$

где $\omega_0 = v_s/R$. Компоненты поля излучения заряда, движущегося по закону (2), определяются формулой [6]

$$E_{\theta,\varphi}(r', t') = -i\frac{e}{2\pi r'}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \omega v_{\theta,\varphi}(t)\, e^{i\omega\tau}, \tag{8}$$

где

$$\tau = t - \mathbf{nr} - t' + r' = t_1 - t' + r',$$

а величина t_1 равна

$$t_1 = t - \mathbf{nr} = t - \mathbf{nr}_s - \mathbf{n}\,\delta\mathbf{r}. \tag{9}$$

Здесь

$$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \tag{10}$$

единичный вектор в направлении излучения, заданный сферическими углами θ и φ.

Предположим, что заряд обладает релятивистской энергией, т. е. $\gamma^{-1} = 1 - v^2 \ll 1$. Тогда, вводя дополнительные углы

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

наложим на них следующие условия:

$$\psi \sim \varphi_1 \sim \gamma^{-1} \ll 1. \tag{11}$$

Будем также предполагать, что отклонения скорости малы, т. е.

$$\delta v_z \sim \delta v_r \sim (\delta v_\varphi)^{1/2} \ll 1. \tag{12}$$

Тогда, разлагая по малым величинам до членов порядка γ^{-3} в выражении (9) и учитывая, что основной вклад в излучение при условиях (11), (12) дают значения азимута $\Phi \sim \gamma^{-1}$, найдем

$$t_1 = \frac{1}{2w_0}\left\{\frac{\lambda^3}{3} + \lambda(\gamma^{-2} + \psi_0^2) - \frac{\varphi_0^3}{3} - \varphi_0(\gamma^{-2} + \psi_0^2)\right\}. \tag{13}$$

В этой формуле

$$\varphi_0 = \varphi_1 - \delta v_{r0}, \ \lambda = \varphi_0 + \Phi, \ \psi_0 = \psi - \delta v_{z0}, \tag{14}$$

а значения скоростей δv_{z0} и δv_{r0} взяты при $t=0$, что соответствует $\Phi=0$.

Сферические компоненты скорости с учетом соотношений (11) и (12) записываются в виде

$$v_\theta = v_r \cos\theta \cos(\Phi - \varphi) - v_\varphi \cos\theta \sin(\Phi - \varphi) - v_z \sin\theta \approx \psi_0, \tag{15}$$

$$v_\varphi = v_r \sin(\Phi - \varphi) + v_\varphi \cos(\Phi - \varphi) \approx \lambda.$$

Тогда, подставляя выражения (13), (15) в формулу для поля излучения (8), найдем

$$\begin{pmatrix} E_\varphi(\mathbf{r}', t') \\ E_\theta(\mathbf{r}', t') \end{pmatrix} = -\frac{e}{\sqrt{\pi}\, r'\omega_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \omega e^{i\omega(r'-t')} e^{-i\mu z_0 - i\mu^3/3} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (2\omega_0/\omega)^{2/3}\, \Phi'(z_0) \\ i\psi_0 (2\omega_0/\omega)^{1/3}\, \Phi(z_0) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где Φ и Φ' — функция Эйри и ее производная, зависящие от аргумента

$$z_0 = \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{2/3} [\gamma^{-2} + (\psi - \delta v_{z_0})^2], \tag{17}$$

а величина $\mu = \varphi_0 (\omega/2\omega_0)^{1/3}$ зависит от азимутального угла φ_1.

Энергия излучения в интервале углов $d\Omega = d\psi d\varphi_1$ определяется формулой

$$dE_{\text{изл}} = d\psi\, d\varphi_1 \int\limits_{r' - \frac{1}{2}\Delta t'}^{r' + \frac{1}{2}\Delta t'} dt' \frac{\mathbf{E}^2(\mathbf{r}', t')}{4\pi} r'^2. \tag{18}$$

Выберем интервал $\Delta t'$, удовлетворяющий условию

$$\omega_0 \Delta t' \sim \varphi_1^3 \gtrsim \gamma^{-3}, \tag{19}$$

однако так, чтобы он не превышал периода обращения частицы по равновесной орбите $T = 2\pi/\omega_0$. Тогда при интегрировании по t' квадрата поля излучения в (18) пределы интегрирования можно растянуть до бесконечности, что дает δ-функцию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d(t' - r')\, e^{-i(\omega - \omega')(t' - r')} = 2\pi\delta(\omega - \omega').$$

Учитывая связь $\omega_0 \Delta t = \Delta\varphi_1$ и принимая во внимание, что в результате

интегрирования по t' зависимость от угла φ_1 пропадает, для мощности излучения $dW = dE_{изл}/dt$ получим

$$\frac{dW_l}{d\omega\, d\psi} = \frac{e^2}{\pi\gamma}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{4/3}\left[l_\sigma\left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^{1/3}\Phi'(z_0) - l_\pi\psi_0\Phi(z_0)\right]^2, \qquad (20)$$

где числа l_σ и l_π выделяют компоненты поляризации поля излучения [1]: $l_\sigma = 1$, $l_\pi = 0$ — σ-компонента; $l_\sigma = 0$, $l_\pi = 1$ — π-компонента; $l_\sigma = \pm l_\pi = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ — правая (левая) круговая поляризация.

Излучение (20) формируется за время $\Delta t \sim (\omega_0\gamma)^{-1}$ в направлении $\psi = \delta v_{z_0}$, $\varphi_1 = \delta v_{r_0}$ в интервале углов $\varphi_0 \sim \psi_0 \sim \gamma^{-1} \ll 1$. С точки зрения наблюдателя излучение формируется за время $\Delta t' \sim (\omega_0\gamma^3)^{-1}$. Заметим, что формула (20) для излучения, будучи получена при условии (4), совпадает с соответствующей формулой для случая движения по винту в однородном поле [6]. Это означает, что в пределах области формирования излучения $\Delta\Phi \sim \gamma^{-1}$ можно заменить траекторию заряда участком винтовой линии, по которой он движется с продольной скоростью δv_{z_0}.

Из формулы (20) видно, что угловое распределение на данной частоте ω зависит от соотношения трех величин ω/ω_0, γ и δv_{z_0}, входящих в аргумент (17) функции Эйри $\Phi(z_0)$. Вблизи максимума спектра $\omega/\omega_0 \sim \gamma^3$ неоднородность сказывается наиболее сильно, если $\delta v_{z_0} \gtrsim \gamma^{-1}$.

В противном случае $(\delta v_{z_0} \ll \gamma^{-1})$ угловое распределение излучения такое же, как и для круговых траекторий.

Выражение (20) представляет собой мощность излучения заряда при однократном прохождении участка траектории вблизи данного азимута $\Phi = 0$. В синхротронах и накопителях электроны совершают условно-периодическое движение по траектории, близкой к круговой. Обычно движение частиц в ускорителях описывается в переменных действиях I_i и фаз Ψ_i синхротронного и бетатронного движений, т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(I_i, \Psi_i, \Phi), \qquad (21)$$

причем I_i характеризует амплитуду отклонения частицы от равновесной круговой траектории. В этих переменных отклонение скорости $\delta\mathbf{v}$ от равновесного значения $\mathbf{v}_s$ в пределах области формирования излучения приближенно равно

$$\delta\mathbf{v}(I_i, \Psi_i, \Phi) \simeq \delta\mathbf{v}_0 + \left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\Psi_i}\right)\Delta\Psi_i + \left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\Phi}\right)_0\Delta\Phi, \qquad (22)$$

где величины с индексом нуль берутся в точке $\Phi = 0$, $\Psi_i = \Psi_i(0) = \Psi_{i0}$, а отклонения фаз равны

$$\Delta\Psi_i = \left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial\Phi}\right)_0\Delta\Phi \sim \Delta\Phi \sim \gamma^{-1} \ll 1. \qquad (23)$$

Поскольку при движении в ведущем магнитном поле ускорителя, как правило, выполняется условие (4), то в пределах области формирования излучения можно положить $\delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}_0$ [5]. В этом случае для мощности излучения при однократном прохождении через участок траектории, где формируется излучение в данном направлении, справедлива полученная выше формула (20).

Однако если время t', в течение которого наблюдают излучение, как это обычно бывает, велико по сравнению с периодом обращения частицы T, то средняя наблюдаемая за время $t' \gg T$ величина мощно-

сти получается путем усреднения по фазам Ψ_i в формуле (20)

$$dW_{\text{набл}} = \langle dW \rangle_{\Psi_{i0}} = \langle dW \rangle_{\Psi_i} \tag{24}$$

при данном значении азимута $\Phi=0$. Очевидно, что этой же формулой определяется среднее значение излучения одной частицы из группы частиц с близкими значениями I_i и перемешанными фазами Ψ_i.

Как видно из (24) и (20), неоднородность магнитного поля приводит к изменению поляризационно-угловых характеристик излучения. В частности, степень линейной поляризации

$$P(\omega, \psi) = \frac{\langle dW_\sigma(\omega, \psi) - dW_\pi(\omega, \psi)\rangle_{\Psi_i}}{\langle dW_\sigma(\omega, \psi) + dW_\pi(\omega, \psi)\rangle_{\Psi_i}} \tag{25}$$

определяется величиной $\gamma\delta v_{z_0}$ и отлична от 100% даже для излучения, распространяющегося в медианной плоскости $\psi = \langle \delta v_{z_0} \rangle$. Пусть медианная поверхность вблизи данного азимута $\Phi=0$ горизонтальна и δv_{z_0} не имеет постоянной горизонтальной составляющей $\langle \delta v_{z_0} \rangle = 0$. Тогда излучение симметрично относительно плоскости $\psi=0$ $(\theta=\pi/2)$ и, следовательно, согласно (20), $dW_\pi(\psi=0) \neq 0$. Усреднение формулы (20) в произвольном случае невозможно произвести, однако для грубой оценки результата, учитывая медленность изменения функций $\Phi(z_0)$ и $\Phi'(z_0)$, можно заменить z_0 на его среднее значение $\langle z_0 \rangle$, тогда получим при $\psi=0$:

$$P(\omega, 0) = \frac{\Phi'^2(\langle z_0 \rangle) - \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{2/3} \langle (\delta v_{z_0})^2 \rangle \Phi^2(\langle z_0 \rangle)}{\Phi'^2(\langle z_0 \rangle) + \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{2/3} \langle (\delta v_{z_0})^2 \rangle \Phi^2(\langle z_0 \rangle)}, \tag{26}$$

где

$$\langle z_0 \rangle = \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{2/3} (\gamma^{-2} + \langle (\delta v_{z_0})^2 \rangle).$$

Пусть, например, $\langle (\delta v_{z_0})^2 \rangle = \gamma^{-2}$. Тогда для максимума спектральной кривой $\omega = \omega_{\max} = 0{,}45\,\gamma^3\omega_0$ получим $P(\omega, 0) \approx 50\%$, т. е. в отличие от однородного поля линейная поляризация излучения в направлении $\psi=0$ не является полной и ее степень зависит от величины $\langle (\delta v_{z_0})^2 \rangle \gamma^2$ [1].

Заметим, что формулы (20), (24) содержат лишь два параметра движения частицы — ее энергию γ (или полную скорость v) и вертикальное отклонение скорости δv_{z_0}. В то же время явная зависимость от радиального отклонения δv_{r_0} отсутствует, хотя, конечно, полная скорость v (и энергия γ) включают в себя, согласно (6), величину δv_{r_0}. Однако поскольку энергия частиц в магнитном поле в ускорителе представляет собой заданный параметр пучка, то выделять из нее радиальную скорость δv_{r_0}, как это было сделано в работе [4], не имеет смысла. Поэтому сделанный в указанной работе вывод о зависимости угловых распределений излучения от амплитуды радиальных бетатронных ко-

Таким образом, полученный при условии (4) результат (20), (24) лебаний ошибочен.

позволяет определить спектрально-угловое распределение синхротрон-

---

[1] Для частот ω, не совпадающих с максимальной $\omega_{\max}$, эффективным параметром является отношение $\langle (\delta v_{z_0})^2 \rangle / (\langle 2\omega_0/\omega)^{2/3}$.

ного излучения, испускаемого с любой точки орбиты электрона с учетом произвольной неоднородности ведущего магнитного поля.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. А. А. Соколову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.
2. Жуковский В. Ч., Шишанин О. Е. ЖЭТФ, 1971, **61**, 1371.
3. Жуковский В. Ч., Шишанин О. Е. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астрон.», 1975, **16**, № 4, 467.
4. Бордовицын В. А., Эпп В. Я., Разина Г. К. «Изв. вузов. Физика», 1976, № 6, 59.
5. Соколов А. А., Жуковский В. Ч. «Письма в ЖТФ», 1976, **2**, 3.
6. Соколов А. А., Жуковский В. Ч., Колесникова М. М., Никитина Н. С., Шишанин О. Е. «Изв. вузов. Физика», 1969, № 2, 108.

Поступила в редакцию
29.6 1977 г.
Кафедра
теоретической физики