УДК 539.126

В. Ч. Жуковский
П. А. Эминов
Шариф Абдалла Хамид
(Судан)

ЛЕПТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается процесс испускания массивной нейтральной векторной частицы заряженным лептоном в магнитном поле H, а также процесс распада покоящегося мюона, в котором электрон рождается в основном состоянии. Вычисляется вероятность указанных процессов. Указывается, что в области сверхсильных полей $H \gg H_0 = \frac{m^2c^3}{e_0\hbar} = 4{,}41 \cdot 10^{13}$Гс эти процессы могут стать наиболее вероятными.

Магнитное поле с напряженностью порядка 10^{12}—10^{14} Гс, существование которого ожидается в поверхностном слое нейтронных звезд [1], может заметным образом влиять на происходящие в нем квантовые процессы. Это относится в первую очередь к процессам с участием электронов, поскольку электронная масса m_e задает величину так называемого критического поля $H_0 = m_e^2c^3/e_0\hbar = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ Гс, которое и определяет область наиболее сильных квантовых эффектов в движении и излучении электронов [2, 3]. Одним из проявлений воздействия сверхсильного магнитного поля может быть изменение фазового объема электронов [4], благодаря чему, например, уменьшается время жизни нейтронов относительно β-распада [5].

В настоящей работе рассматривается излучение массивного фотона заряженным лептоном и распад μ-мезона в сверхсильном магнитном поле. Заметим, что подобные процессы уже обсуждались в литературе (см. [6] и цитированную там литературу, а также [7 и 8]), однако соответствующие расчеты были выполнены при условии, что магнитное поле относительно слабое.

Испускание массивного фотона. Как известно [6], спектр энергии заряженного лептона с зарядом e и массой m (для определенности будем говорить об электроне) в магнитном поле $H \| Oz$ определяется выражением [1]

$$E = m(1 + 2nH/H_0 + p_z^2/m^2)^{1/2}, \tag{1}$$

в котором $n=0, 1, 2, \ldots$ — главное квантовое число, p_z — компонента импульса в направлении оси z. Рассмотрим взаимодействие электронного поля ψ с полем массивной векторной частицы B, для которого выберем наиболее простой векторный вариант

$$L_{\text{int}} = e\psi^+ \gamma^0 \gamma_\mu \psi B^\mu. \tag{2}$$

Тогда матричный элемент перехода с испусканием B-частицы будет равен [2]

[1] В дальнейшем положим $c=\hbar=1$ и выберем метрику $ab=a^0b^0-\mathbf{ab}$.

[2] В случае рождения ρ^0-мезона, согласно модели векторной доминантности, так же как и в работе [7], заряд e в матричном элементе (3) эффективно заменяется величиной $e^2/2\gamma_\rho$, где $\gamma_\rho^2/4\pi \simeq 0{,}5$.

$$M_{fi}=\sqrt{4\pi}\, ej_\mu(q)\overset{*}{e}{}^\mu, \tag{3}$$

где ток перехода

$$j_\mu(q)=\int \psi_f^+\alpha_\mu e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\psi_i\, d^3x \tag{4}$$

зависит от 4-импульса B-частицы q с массой $M=(q_0^2-\mathbf{q}^2)^{1/2}\gg m$ и поляризацией e^μ.

Вероятность перехода записывается, как обычно, в виде

$$dw_{fi}=|M_{fi}|^2 2\pi\delta(E-E'-q_0)\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q^0}. \tag{5}$$

Суммирование по поляризациям массивного фотона $e^{(\lambda)}$ ($\lambda=1$, 2, 3) проводится с помощью равенства

$$\sum_{\lambda=1,2,3} e_\mu^{(\lambda)}e_\nu^{(\lambda)}=-\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{M^2}\right). \tag{6}$$

Поскольку ток j^μ непрерывен ($jq=0$), то отсюда находим

$$\sum_\lambda |ej|^2=-(j_\mu^+ j^\mu)=-\overset{+}{j^0} j^0+\mathbf{j}^+\mathbf{j}. \tag{7}$$

Матричные элементы j^μ, так же как и для синхротронного излучения [6], выражаются через функции Лагерра $I_{nn'}(y)$

$$I_{n'n}(y)=\sqrt{\frac{n'!}{n!}}\, e^{-y/2}y^{\frac{n-n'}{2}}L_n^{n-n'}(y),\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{|\mathbf{q}|\sin\theta}{m}\right)^2\frac{H_0}{H}, \tag{8}$$

где θ — угол между импульсом массивного фотона $\mathbf{q}$ и магнитным полем $\mathbf{H}$.

Если начальное состояние электрона ультрарелятивистское, т. е. $E\gg m$, $n\gg 1$, а магнитное поле по величине сравнимо с критическим ($H\sim H_0$), то основной вклад в вероятность излучения должны давать переходы в состояния с относительно малыми квантовыми числами $n'\ll n$ [2]. В этом случае просуммированные по поляризациям частицы B квадраты матричных элементов (7) имеют вид

$$\sum_\lambda |ej|^2=\frac{1}{4}\left(1+\zeta'\frac{m}{E'_\perp}\right)I^2_{n,n'-1}+\frac{1}{4}\left(1-\zeta'\frac{m}{E'_\perp}\right)I^2_{nn'}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{p'_\perp}{E'}I_{nn'}I_{n,n'-1}, \tag{9}$$

где E' — конечное значение энергии электрона,

$$E'_\perp=\sqrt{p'^2_\perp+m^2},\quad p'_\perp=m\sqrt{\frac{2n'H}{H_0}} —$$

конечное значение поперечного импульса, ζ' — квантовое число, задающее ориентацию спина электрона в конечном состоянии: $\zeta'=1$ — вдоль и $\zeta'=-1$ — против направления оси z. При этом продольная компонента импульса электрона в начальном состоянии может быть положена равной нулю ($p_z=0$), а в конечном состоянии она согласно закону сохранения равна $p_z=-|\mathbf{q}|\cos\theta$. В формуле (9) для функций Лагерра $I_{nn'}(y)$ принято приближение

$$I_{n\pm 1,n'}(y)\simeq I_{nn'}(y). \tag{10}$$

Кроме того, условие $n' \ll n$ позволяет воспользоваться следующей асимптотикой для функций Лагерра [2, 9]:

$$I_{nn'}(y) \simeq \frac{1}{\sqrt{n'!\,\sqrt{2\pi n}}} D_{n'}(\xi), \tag{11}$$

где

$$D_{n'}(\xi) = 2^{-\frac{n'}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} H_{n'}(\xi/\sqrt{2})$$

— функция параболического цилиндра, зависящая от аргумента

$$\xi = 2\sqrt{n' + g + n\cos^2\theta} + s\sqrt{g}, \tag{12}$$

где введены следующие параметры:

$$s = \frac{M^2}{mE}, \quad g = \frac{H_0}{2H}. \tag{13}$$

После суммирования и усреднения по спиновым состояниям электрона до и после излучения и подстановки асимптотики (11) в (9) получим вероятность перехода $n \to n'$ ($n' \neq 0$):

$$w_{nn'} = \frac{e^2E}{2n'!\,n\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[D_{n'}^2(\xi) + n'D_{n'-1}^2(\xi) - \frac{4n'}{\xi - s\sqrt{g}} D_{n'-1}(\xi)D_{n'}(\xi)\right]. \tag{14}$$

Здесь вместо угла излучения θ введена переменная интегрирования $\tau = \sqrt{n}\cos\theta$, причем пределы интегрирования, благодаря экспоненциальному затуханию подынтегрального выражения при $|\tau| = \sqrt{n} \gg 1$, распространены до бесконечности.

В частном случае переходов на основной уровень $n' = 0$, $\zeta' = -1$ вместо формулы (14) находим

$$w_{n0} = \frac{e^2E}{2n\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad \xi = 2\sqrt{g + \tau^2} + s\sqrt{g}. \tag{15}$$

Далее предположим, что один из двух параметров (13), характеризующих вероятность процесса, мал, т. е.

$$s = \frac{M^2}{mE} \ll 1. \tag{16}$$

Это условие, несмотря на малость электронной массы по сравнению с массой тяжелого фотона ($m \ll M$), может быть обеспечено за счет большой величины энергии электрона $E \gg m$. При этом интеграл, стоящий в правой части равенства (15), легко вычисляется, после чего находим

$$w_{n0} = \frac{1}{2} e^2 \frac{m^2}{E} \frac{H}{H_0} e^{-\frac{H_0}{H}} \tag{17}$$

результат, не зависящий от массы M и совпадающий с результатом для безмассового фотона [2].

Рассмотрим теперь большие по сравнению с единицей квантовые числа $n' \gg 1$, но все же $n' \ll n$. Тогда для функций $D_{n'}(\xi)$ справедлива следующая асимптотика:

$$D_{n'}(\xi) \simeq \sqrt{2}\, e^{-\frac{n'}{2}} (n')^{\frac{1}{2}n' + \frac{1}{6}} \Phi(z), \tag{18}$$

где $\Phi(z)$ — функция Эйра, зависящая от аргумента

$$z=\frac{g+\tau^2+s\sqrt{gn'}-\frac{1}{2}}{(n')^{1/3}}. \tag{19}$$

Применяя (18) вместо формулы (14), получим

$$w_{nn'}=\frac{e^2E}{2\pi n\,(n')^{5/6}}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left[\Phi^2(z)\frac{g+\tau^2}{(n')^{1/3}}+\Phi'^2(z)\right]. \tag{20}$$

Интегрирование по угловой переменной τ проводится с помощью известных (см., например, [10, ч. 1, с. 251]) интегралов от функции Эйри, после чего находим

$$w_{nn'}=-\frac{e^2m^2}{2^{2/3}\sqrt{\pi}\,E\,(n')^{2/3}}\frac{H}{H_0}\left[\Phi'(x)+2^{-\frac{1}{3}}s\sqrt{g}\,(n')^{-\frac{1}{6}}\int_x^{\infty}\Phi(x)\,dx\right], \tag{21}$$

где

$$x=x_1+x_2=2^{2/3}\left[s\sqrt{g}\,(n')^{1/6}+\frac{g-\frac{1}{2}}{(n')^{1/3}}\right]. \tag{22}$$

Переходя к безмассовому фотону, в пределе $M\to 0$ (т. е. $x_1\to 0$) при $H\sim H_0$ из формулы (21) получаем известный уже результат для спектрального распределения синхротронного излучения при переходах $n\to n'$, $n'\ll n$, $n'\gg 1$ [11]. Если же считать поле относительно слабым, т. е. $H\ll H_0$ ($g\gg 1$), так что произведение параметров sg велико

$$\frac{M^2}{mE}\frac{H_0}{H}\gg 1, \tag{23}$$

то два слагаемых в аргументе (22) оказываются одного порядка $x_1\sim x_2$, причем $x\gg 1$. В этом случае функция Эйри и ее производная экспоненциально убывают пропорционально

$$\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right). \tag{24}$$

Минимум показателя (24) обеспечивается, когда n' принимает значение

$$n_0'=\frac{4g}{s^2}=\frac{2H_0}{H}\left(\frac{mE}{M}\right)^2\gg 1. \tag{25}$$

Эта область и дает основной вклад в полную вероятность излучения[3]:

$$w=\sum_{n'}w_{nn'}. \tag{26}$$

Переходя в этой формуле от суммирования по n' к интегрированию вблизи области $n'\sim n_0'$, получаем

$$w=e^2\frac{2}{\sqrt{3}}m\left(\frac{m^2}{M^2}\frac{H}{H_0}\right)\exp\left(-\sqrt{3}\frac{M^2}{mE}\frac{H_0}{H}\right). \tag{27}$$

---

[3] Заметим, что, как мы и предполагали вначале, эффективные квантовые числа $n'\sim n_0'$ малы по сравнению с n, так как $n_0'/n=(m/M)^4\ll 1$.

Таким образом, вероятность рождения массивного фотона в пределе относительно слабых полей ($H \ll H_0$) убывает по экспоненциальному закону, что с точностью до предэкспоненциального множителя согласуется с результатом работ [6, 7].

Обратимся к случаю сверхсильных полей $H \sim H_0$. Наибольший интерес при этом с учетом условия (16) представляет сравнительно узкая область энергий электрона, определяемая неравенством

$$s^3 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \frac{E}{m} \gg 1. \tag{28}$$

В этой области аргумент x функций Эйри в формуле (21) можно приближенно считать равным x_1, т. е.

$$x \simeq 2^{2/3} s \sqrt{g} (n')^{1/6}, \tag{29}$$

причем эффективные значения $x \sim 1$, а квантовое число $n' \gg 1$, $n' \ll n$. Тогда суммирование по n' в (26) сводится к интегрированию по спектральной переменной x

$$w = \int_0^\infty \frac{dw}{dx} dx, \quad dx = \frac{2^{2/3}}{6} s \sqrt{g} (n')^{-5/6} dn', \tag{30}$$

где подынтегральное выражение равно

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{3}{\sqrt{\pi}} \frac{e^2 m^2}{E s^2} \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 \left[\Phi'(x) + \frac{x}{2} \int_x^\infty \Phi(x') dx'\right] x. \tag{31}$$

В результате интегрирования функций Эйри в (30), (31) по известным формулам (см. [10, ч. 1]) находим полную вероятность

$$w = \frac{2}{3} \frac{e^2 m^2}{E} \left(\frac{mE}{M}\right)^2 \left(\frac{H}{H_0}\right)^2. \tag{32}$$

В то же время вероятность испускания γ-кванта с массой нуль при $H \sim H_0$ оценивается, согласно [11], как

$$w^\gamma = \frac{3^{7/6} \Gamma(2/3)}{4\pi} \frac{e^2 m^2}{E} \left(\frac{H}{H_0} \frac{E}{m}\right)^{2/3}. \tag{33}$$

Отношение вероятностей (32) и (33) можно записать в виде

$$\frac{w}{w^\gamma} \sim \left[s^3 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \frac{E}{m}\right]^{-2/3}, \tag{34}$$

откуда следует, что вследствие условия (28) $w/w^\gamma \ll 1$.

Распад μ-мезона. Рассмотрим покоящийся в магнитном поле μ-мезон с энергией $E = m_\mu$ (m_μ — масса μ-мезона, квантовые числа $n=0$, $p_z=0$). В процессе распада $\mu \to e\nu\bar{\nu}$ рождается электрон с энергией $E' = E - q^0$, где $q^0 = \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\bar{\nu}}$ —суммарная энергия нейтринной пары. В магнитном поле это условие запишется как

$$m_\mu - q^0 = m_\mu \left[2 (H/H_{0\mu}) n' + m_e^2/m_\mu^2 + p_z'^2/m_\mu^2\right]^{1/2}, \tag{35}$$

где $p_z' = -|\mathbf{q}| \cos\theta$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_{\bar{\nu}}$ — суммарный импульс нейтринной пары.

Вероятность μ-распада, вычисленная согласно V—A варианту теории слабых взаимодействий ([10, ч. 2], см. также [8]), имеет общий вид

$$w_\mu = \frac{G^2}{3(2\pi)^4}\int d^3q\,[(jq)(j^*q) - q^2(jj^*)], \tag{36}$$

где

$$j^\alpha = \int d^3x\,(\bar\psi_\mu O^\alpha \psi_e)\, e^{-i\mathbf{qr}}, \quad O^\alpha = \gamma^\alpha(1+\gamma^5),$$

а ψ_μ и ψ_e — волновые функции мюона и электрона в магнитном поле. Если магнитное поле $H \gg m_\mu^2/e$, то равенство (35) удовлетворяется лишь в случае $n'=0$, т. е.

$$m_\mu - q^0 = \sqrt{m_e^2 + p_z'^2}. \tag{37}$$

Вычислим вероятность распада в случае, когда электрон рождается в основном состоянии, т. е. $n=0 \to n'=0$:

$$w_\mu = \frac{G^2}{3(2\pi)^3}\int |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}|\, d\cos\theta \left(1 - \frac{|\mathbf{q}|\cos\theta}{\sqrt{m_e^2 + |\mathbf{q}|^2\cos^2\theta}}\right) \times$$

$$\times \left(m_\mu - \sqrt{m_e^2 + |\mathbf{q}|^2\cos^2\theta} - |\mathbf{q}|\cos\theta\right)^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{q}|^2\sin^2\theta}{2eH}\right). \tag{38}$$

Учтем далее, что $m_e \ll m_\mu$ и положим $eH \gg m_\mu^2$, тогда в равенстве (38) можно пренебречь электронной массой и положить экспоненту равной единице.

Как видно из этого равенства, подынтегральное выражение оказывается отличным от нуля, только если $\cos\theta < 0$. Это соответствует импульсам электрона $p_z' > 0$, т. е. электрон, рождающийся в основном состоянии $n'=0$, движется вдоль вектора магнитного поля, а его спин ориентирован в противоположном направлении ($\zeta' = -1$). Интегрируя (38), находим вероятность «одномерного» распада:

$$w_\mu = \frac{G^2 m_\mu^5}{36\pi^3}. \tag{39}$$

По сравнению со свободным распадом при $H=0$ (см. [10, ч. 2]), когда все направления вылета электрона оказываются возможными, найденная нами вероятность (39) больше в 16/3 раз (см. [10, ч. 2], ср. также с результатом [12]).

Заметим, что наш результат (39) может быть получен также и из общей формулы для свободного распада, приведенной в работе [10]. Для этого необходимо при суммировании по конечным состояниям электрона учесть указанные выше ограничения на фазовый объем электрона, которые следуют из условия $eH \gg m_m^2$.

Численные оценки и обсуждение результатов. Оценим рассмотренный выше процесс испускания электроном массивной векторной частицы в двух конкретных случаях. Для ρ^0-мезона с массой $M=770$ МэВ, испускаемого электроном с массой $m=m_e \simeq 0{,}5$ МэВ и энергией $E \simeq 10^4$ ГэВ в поле $H \simeq H_0 = 4{,}4\ 10^{13}$ Гс, получим

$$s = \frac{M^2}{mE} \simeq 0{,}1, \quad s^3\left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \frac{E}{m} \simeq 10^4.$$

Для нейтрального мезона в модели Вайнберга [13] с минимальной массой $M \simeq 74$ ГэВ и для энергии электрона $E \simeq 10^8$ ГэВ соответствующие значения равны 0,1 и 10^7. При этом отношение (34) имеет порядок $w/w^\gamma \sim 10^{-4}$—10^{-5}. Отсюда следует, что рождение массивного фотона в условиях сверхсильных полей $H \sim H_0$ вблизи поверхности пульсаров может стать возможным. Что касается «одномерного» μ-распада, то для его осуществления необходимы магнитные поля колоссальной напряженности $H \gg 10^4 H_0$. Если же $H < 10^4 H_0$, то в этом случае в результате μ-распада наиболее вероятно рождение электрона в возбужденном состоянии $n' \neq 0$ с отличным от нуля поперечным импульсом.

В заключение авторы благодарят А. А. Соколова за внимание к работе и А. В. Борисова и Д. В. Гальцова за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gunn T., Ostriker T. «Nature», 1969, **221**, 454.
2. Sokolov A. A., Nikitina N. S., Zhukovskii V. Ch. «Phys. Lett.», 1973, **43A**, 85.
3. Sokolov A. A., Ternov I. M., Borisov A. V., Zhukovskii V. Ch. «Phys. Lett.», 1974, **49A**, 9.
4. Скобелев В. В. ЖЭТФ, 1976, **71**, 1263.
5. Canuto V. «Ann. N. Y. Acad. Sci.», 1975, **257**, 108.
6. «Синхротронное излучение». Сб. статей под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., 1966.
7. Гальцов Д. В., Никитина Н. С. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ. астрон.», 1974, **15**, № 4, 375.
8. Байер В. Н., Катков В. М. ДАН СССР, 1966, **171**, 313.
9. Соколов А. А., Жуковский В. Ч., Никитина Н. С. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астрон.», 1974, **15**, № 5, 548.
10. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория, ч. 1. М., 1968; Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория, ч. 2. М., 1971.
11. Соколов А. А., Борисов А. В., Жуковский В. Ч. «Изв. вузов. Физика», 1975, № 10, 51.
12. Лоскутов Ю. М., Захарцов В. М. «Изв. вузов. Физика», 1969, № 8, 98.
13. Weinberg S. «Phys. Rev. Lett.», 1967, **19**, 1264.

Поступила в редакцию
29.6 1977 г.
Кафедра
теоретической физики