УДК 533.951

Л. С. Кузьменков
П. А. Поляков

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ С УЧЕТОМ ТОРМОЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Исследуются линейные колебания релятивистской плазмы с учетом торможения излучением в гидродинамическом приближении. Получено релятивистски инвариантное дисперсионное соотношение и проводится его анализ для неподвижной плазмы в отсутствие внешних полей, для плазмы, движущейся с постоянной средней скоростью, для волн, распространяющихся в направлениях параллельном и перпендикулярном внешнему магнитному полю. Показано, что потери энергии при коллективном излучении электронов приводят к затуханию всех типов плазменных колебаний. Это затухание превосходит затухание Ландау для волн в плазме с плотностью $n \geqslant 10^9$ см^3, фазовая скорость которых по крайней мере на порядок больше тепловой скорости электронов.

Распространение высокочастотных волн в релятивистской плазме связано с излучением заряженных частиц. Исследуются колебания релятивистской плазмы с учетом торможения излучением. Согласно формуле Абрагама — Лоренца—Дирака [1] излучение частиц плазмы сопровождается радиационным торможением. Последовательный учет торможения излучением можно провести только в кинетической теории. Выясним, к каким физическим следствиям приводит учет торможения излучением в рамках так называемого односкоростного приближения [2], когда температурным разбросом частиц можно пренебречь.

Функция распределения в этом случае имеет вид

$$f = n(x)\,\delta(u^k - \tau^k)\,2\theta(u^0)\,\delta(u_\alpha u^\alpha - 1) \tag{1}$$

и, как нетрудно видеть, удовлетворяет уравнению непрерывности в восьмимерном пространстве координат x^α и скоростей u^β

$$u^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + F'^{\beta}_{\sigma} \frac{\partial (u^\sigma f)}{\partial u^\beta} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \tag{2}$$

где τ^α—4 — вектор гидродинамической скорости $\theta(u^0)$, $\delta(u_\alpha u^\alpha - 1)$ — функции Хевисайда и δ-функция Дирака. В линейном по полю приближении [3]

$$F'^{\beta}_{\sigma} = \frac{e}{mc^2} F^{\beta}_{\sigma} + \frac{2}{3} \frac{e^3}{m^2 c^4} \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} u_\gamma.$$

Плотность числа частиц $n(x)$ связана с инвариантной плотностью $\nu(x)$ соотношением [4]

$$n(x) = \nu(x)\,\tau^0(x). \tag{3}$$

Интегрируя уравнение (2) с учетом (1) по скоростям с весами 1 и u^α, получим

$$\frac{\partial(\nu(x)\tau^\alpha)}{\partial x^\alpha}=0, \quad (4)$$

$$\tau^\beta\frac{\partial\tau^\alpha}{\partial x^\beta}=\frac{e}{mc^2}F^{\alpha\gamma}\tau_\gamma+\frac{2}{3}\frac{e^3}{m^2c^4}\frac{\partial F^{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}\tau^\beta\tau_\gamma. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) вместе с уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial^2A^\alpha}{\partial x_\beta\partial x^\beta}=\frac{4\pi}{c}J^\alpha,\quad F^{\alpha\gamma}=\frac{\partial A^\gamma}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\gamma}, \quad (6)$$

$$J^\alpha=e_in_i\tau_i^\alpha+e_en_e\tau_e^\alpha$$

образуют полную систему уравнений для описания релятивистской плазмы в гидродинамическом приближении. В уравнениях (4) — (6) индексы i, e относятся к ионам и электронам соответственно.

Рассмотрим линейные колебания электронной компоненты плазмы, считая ионы неподвижными. Полагая, что в состоянии равновесия

$$J_\alpha=0,\ F^{\alpha\gamma}=F_{(0)}^{\alpha\gamma},\ \tau_e^\alpha=\tau_{(0)}^\alpha,\ \nu_e=\nu_{(0)}, \quad (7)$$

а все переменные величины пропорциональны $\exp\{-ik_\alpha x^\alpha\}$, систему уравнений (4)—(6) в линейном приближении можно представить в виде

$$\nu_{(0)}(-ik_\beta\tau^\beta)+\nu(x)(-ik_\beta\tau_{(0)}^\beta)=0,$$

$$\tau_{(0)}^\beta(-ik_\beta\tau^\alpha)=\frac{e}{mc^2}(F_{(0)}^{\alpha\gamma}\tau_\gamma+F^{\alpha\gamma}\tau_{(0)\gamma})+\frac{2}{3}\frac{e^3}{m^2c^4}(-ik_\beta\tau_{(0)}^\beta)F^{\alpha\gamma}\tau_{(0)\gamma},$$

$$A^\alpha=-\frac{4\pi e}{k_\beta k^\beta c}[\nu_{(0)}\tau^\alpha+\nu(x)\tau_{(0)}^\alpha], \quad (8)$$

$$F^{\alpha\gamma}=-\frac{4\pi e}{k_\beta k^\beta c}[-\nu_{(0)}ik^\alpha\tau^\gamma-ik^\alpha\nu(x)\tau_{(0)}^\gamma+\nu_{(0)}ik^\gamma\tau^\alpha+\nu(x)ik^\gamma\tau_{(0)}^\alpha].$$

С помощью несложных алгебраических преобразований из системы (8) найдем

$$\left\{\delta_\gamma^\alpha+\frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2}\frac{1}{k_\beta\tau_{(0)}^\beta}\left(1-i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^2}k_\beta\tau_{(0)}^\beta\right)\lambda_\gamma^\alpha-i\frac{eF_{(0)\gamma}^\alpha}{mc^2k_\beta\tau_{(0)}^\beta}\right\}A^\gamma=\Lambda_\gamma^\alpha A^\gamma=0, \quad (9)$$

где $\omega_p^2=4\pi e^2\nu_{(0)}/m$. Здесь введено обозначение

$$\lambda_\gamma^\alpha=k^\alpha\tau_{(0)\gamma}+k_\gamma\tau_{(0)}^\alpha-\left(k^\beta\tau_{(0)\beta}\delta_\gamma^\alpha+\frac{k_\gamma k^\alpha}{k_\beta\tau_{(0)}^\beta}\right).$$

Из условия разрешимости однородной системы линейных алгебраических уравнений (9) относительно A^γ получаем дисперсионное соотношение для волн в плазме

$$\det\left|\delta_\gamma^\alpha+\frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2}\frac{1}{k_\beta\tau_{(0)}^\beta}\left(1-i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^2}k_\beta\tau_{(0)}^\beta\right)\lambda_\gamma^\alpha-i\frac{eF_{(0)\gamma}^\alpha}{mc^2k_\beta\tau_{(0)}^\beta}\right|=0. \quad (10)$$

Дисперсионное соотношение (9) является релятивистски инвариантным и поэтому справедливым в любой инерциальной системе отсчета. Потери энергии в излучающей системе зарядов привели к появлению в (10) члена $ik_\beta\tau^\beta_{(0)}2e^2/3mc^2$, за счет которого матрица (9) является неэрмитовой.

Проведем анализ дисперсионного уравнения для некоторых важных случаев.

1. Полагаем, что внешние поля отсутствуют $F^\alpha_{(0)\gamma}=0$ и плазма неподвижна $\tau^\alpha_{(0)}=\{1, 0, 0, 0\}$. Тогда матрица Λ^α_γ становится диагональной, а (10) распадается на два дисперсионных соотношения

$$1-\frac{\omega_p^2}{k^0k_0c^2}\left(1-i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^2}k_0\right)=0, \tag{11}$$

$$1-\frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2}\left(1-i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^2}k\right)=0, \tag{12}$$

для продольных и поперечных волн соответственно.

Мы ищем волновые решения уравнений (8), удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}\,k^0\gg\mathrm{Im}\,k^0$. Поэтому соотношения (11), (12) можно переписать в виде

$$\omega_1^2=\omega_p^2,\quad \omega_2^2=k^2c^2+\omega_p^2, \tag{13}$$

$$\gamma=-\frac{1}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega_p^2, \tag{14}$$

где $\omega_{1,2}=\mathrm{Re}(ck^0_{(1,2)})$, $\gamma=\mathrm{Im}(ck^0)$.

Формулы (13) совпадают с хорошо известными выражениями для частот продольных и поперечных плазменных колебаний [5]. Учет лоренцовых сил трения привел к появлению затухания волн в плазме. Декремент затухания определяется формулой (14), причем его величина одинакова как для продольных, так и для поперечных колебаний.

В гидродинамическом приближении затухание электромагнитных колебаний, обусловленное радиационным торможением, является единственным для бесстолкновительной плазмы. Однако, как хорошо известно [5], в бесстолкновительной плазме за счет взаимодействия частиц с волнами существует затухание Ландау с декрементом

$$\gamma_{\text{л}}=-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{m}{\theta}\right)^{3/2}\frac{\omega_p^4}{k^3}\exp\left\{-\frac{m}{2\theta}\frac{\omega_p^2}{k^2}-\frac{3}{2}\right\}, \tag{15}$$

которое нельзя получить в гидродинамическом приближении. В связи с этим интересно сравнить затухание Ландау $\gamma_{\text{л}}$ и затухание, обусловленное радиационным торможением γ.

Численные оценки показывают, что для широкого класса плазменных сред с плотностями электронов $n\geqslant10^9$ см$^{-3}$ затухание γ превосходит затухание Ландау для волн с фазовыми скоростями $v_\phi>10\sqrt{\theta/m}$. Следовательно, затухание Ландау в «чистом» виде может быть экспериментально измерено для волн, фазовая скорость которых меньше тепловой скорости частиц. Только для такого типа волн имеются экспериментальные измерения затухания Ландау [6].

2. Рассмотрим плазму в системе координат, в которой $\tau^\alpha=\{\tau^0_{(0)}, \tau^1_{(0)}, 0, 0\}$, $k^\alpha=\{k^0, k, 0, 0\}$ и внешние поля отсутствуют. В этом случае отличные от нуля матричные элементы в (9) принимают вид

$$\Lambda_{00} = 1 + \frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2} \frac{1}{k_\beta \tau_{(0)}^\beta} \left(1 - i \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} k_\beta \tau_{(0)}^\beta\right) \left[2k^0 \tau_{(0)0} - k^\beta \tau_{(0)\beta} - \frac{k_0 k^0}{k_\beta \tau_{(0)}^\beta}\right],$$

$$\Lambda_{10} = \frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2} \frac{1}{k_\beta \tau_{(0)}^\beta} \left(1 - i \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} k_\beta \tau_{(0)}^\beta\right) \left[k^1 \tau_{(0)0} - k_0 \tau_{(0)}^1 - \frac{k_0 k^1}{k_\beta \tau_{(0)}^\beta}\right],$$

$$\Lambda_{01} = \frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2} \frac{1}{k_\beta \tau_{(0)}^\beta} \left(1 - i \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} k_\beta \tau_{(0)}^\beta\right) \left[k^0 \tau_{(0)1} + k_1 \tau_{(0)}^0 - \frac{k_1 k_0}{k_\beta \tau_{(0)}^\beta}\right],$$

$$\Lambda_{11} = 1 + \frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2} \frac{1}{k_\beta \tau_{(0)}^\beta} \left(1 - i \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} k_\beta \tau_{(0)}^\beta\right) \left[2k^1 \tau_{(0)1} - k^\beta \tau_{(0)\beta} - \frac{k_1 k^1}{k_\beta \tau_{(0)}^\beta}\right], \tag{16}$$

$$\Lambda_{22} = \Lambda_{33} = 1 - \frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2} \frac{1}{k_\beta \tau_{(0)}^\beta} \left(1 - i \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2}\right) k_\beta \tau_{(0)}^\beta.$$

Приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов (16), получим дисперсионные соотношения для продольных плазменных колебаний:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{(k_\beta \tau_{(0)}^\beta)^2 c^2} \left(1 - i \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} k_\beta \tau_{(0)}^\beta\right) = 0, \tag{17}$$

$$1 - \frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2} \left(1 - i \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} k_\beta \tau_{(0)}^\beta\right) = 0. \tag{18}$$

Введем обозначения $k^\alpha = k'^\alpha + i\gamma y^\alpha$ и будем предполагать, что действительная часть вектора k^α значительно больше мнимой.

Находим

$$\omega_{1,2} = \pm \omega_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + kv, \quad \omega_3^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2, \tag{19}$$

$$\gamma = -\frac{1}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_p^2, \quad y^\alpha = \tau_{(0)}^\alpha / c. \tag{20}$$

Здесь v — скорость плазмы в рассматриваемой системе координат. Из формулы (19), (20) видно, что в движущейся системе координат частота продольных колебаний зависит от длины волны. Дисперсионное соотношение для поперечных колебаний не изменяется. Кроме того, наряду с затуханием во времени появляется также пространственное затухание. При этом физические параметры плазмы изменяются по закону

$$n(x) = n \exp\left\{\gamma \frac{1 - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right\} \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

3. Пусть $k^\alpha = \{k^0, k^1, 0, 0\}$, $\tau_{(0)}^\alpha = \{1, 0, 0, 0\}$, и плазма находится во внешнем магнитном поле $\mathbf{B} = \{B, 0, 0\}$.

Тогда вместо (10) имеем уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_1 & -i\Lambda_2 \\ 0 & 0 & i\Lambda_2 & \Lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

где

$$\Lambda_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{k_\beta k^\beta c^2}\left(1 - i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^2}k_0\right), \qquad \Lambda_2 = \frac{eB}{mc^2 k_0},$$

$$\Lambda_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{k_0 k^0 c^2}\left(1 - i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^2}k_0\right).$$

Из равенства (21) получаем два дисперсионных соотношения: для ленгмюровских колебаний:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 - i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega\right) = 0, \tag{22}$$

для поперечных электромагнитных колебаний, распространяющихся вдоль магнитного поля:

$$N^2 = \frac{\omega \pm \omega_B}{\omega \mp \omega_B} - \frac{\omega_p}{\omega(\omega \mp \omega_B)}\left(1 - i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega\right). \tag{23}$$

Здесь $N = kc/\omega$ — показатель преломления, $\omega_B = eB/mc$ — циклотронная частота.

Для многих приложений выражение (23) можно упростить. Например, при $\omega_p \ll kc$ получим

$$N^2 \cong 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2c^2}\left(1 - i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega\right),$$

$$\omega^2 \cong k^2c^2 + \omega_p^2, \qquad \gamma = -\frac{1}{3}\omega_p^2\frac{e^2}{mc^3}. \tag{24}$$

4. Рассмотрим случай распространения электромагнитных волн в неподвижной плазме в направлении, перпендикулярном магнитному полю.

Дисперсионное уравнение в этом случае можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_3 & 0 & i\Lambda_2 \\ 0 & 0 & \Lambda_1 & 0 \\ 0 & -i\Lambda_2 & 0 & \Lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

где Λ_i определены формулами (21).

Отсюда находим дисперсионные соотношения для продольных и поперечных волн

$$N_1 = \frac{\left[\omega^2 - \omega_p^2\left(1 - i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega\right)\right]\left[\omega^2 - \omega_p^2 - \omega\omega_B\right]}{\omega^2\left[\omega^2 - \omega_B^2 - \omega_p^2\left(1 - i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega\right)\right]}, \tag{26}$$

$$N_2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 - i\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega\right). \tag{27}$$

Из формулы (27) для малых декрементов затухания имеем

$$\omega^2 = k^2c^2 + \omega_p^2, \qquad \gamma = -\frac{1}{3}\omega_p^2\frac{e^2}{mc^3}. \tag{28}$$

Для ленгмюровских колебаний в магнитном поле, фазовая скорость которых много меньше скорости света $\omega/k \ll c$, уравнение (26) значительно упрощается и принимает вид

$$\omega^2 = \omega_B^2 + \omega_p^2, \qquad \gamma = -\frac{1}{3}\omega_p^2 \frac{e^2}{mc^3}. \tag{29}$$

Можно рассмотреть и другие предельные случаи, для которых соотношения (23) и (24) упрощаются.

В заключение отметим, что учет торможения излучением приводит к появлению затухания всех типов плазменных волн в магнитном поле. Это затухание обусловлено обратным действием на заряды излучения и связано с потерями энергии электронов при коллективных излучениях. Для волн в плазме, фазовая скорость которых превышает на порядок тепловую скорость электронов, затухание, вызванное радиационным торможением, превосходит затухание Ландау.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hakim R. «J. Math. Phys.», 1967, 8, 1315.
2. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., 1966.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967.
4. Кузьменков Л. С., Поляков П. А. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астрон.», 1977, № 1.
5. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. М., 1974.
6. Долгополов В. В., Ермаков А. И., Назаров Н. Н., Степанов К. Н., Толок В. Т. ЖЭТФ, 1963, 45, 1260.

Поступила в редакцию
1.6 1977 г.
Кафедра
теоретической физики