

УДК 530.145

В. И. Григорьев
Е. Р. ЛубенецРАСПАД КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО
СОСТОЯНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

На основе решения нестационарного уравнения Шредингера в работе рассмотрено влияние зависящего от времени возмущения на вероятность туннелирования частицы через барьер.

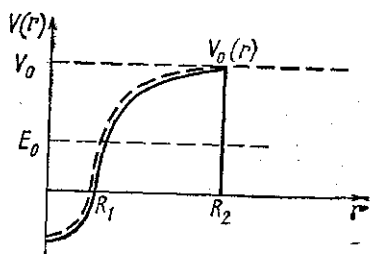
Вопрос о распаде квазистационарного состояния для сферически-симметричного потенциала $V(r)$, имеющего вид ямы, отделенной от внешней области потенциальным барьером, неоднократно рассматривался в рамках различных подходов (см. [1, 2] и цитированную там литературу). На основе решения нестационарного уравнения Шредингера в работе [3] предложен новый подход, который основан на физической картине возникновения квазистационарного в случае, когда

$$I(E_0) = \frac{1}{\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{2m(V(r) - E_0)} dr \gg 1, \quad (1)$$

где R и R_2 — корни уравнения $V(r) - E_0 = 0$.

В настоящей статье (в значительной мере являющейся продолжением исследований [1, гл. V, § 4]) рассмотренный в [3] подход используется для исследования влияния нестационарных возмущений на распад квазистационарного состояния.

Постановка задачи следующая. Пусть имеется потенциал с барьером. Для простоты, не ограничивающей общности, удобно рассмотреть потенциал $V(r)$ вида, изображенного на рисунке. В отсутствие возмущения распаду квазистационарного состояния при $I(E_0) \gg 1$ отвечает волновая функция $\Psi(r, t)$, удовлетворяющая нестационарному уравнению Шредингера с потенциалом $V(r)$ и начальному условию



$$\Psi(r, t_0) = \varphi_0(r) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_0 t_0 \right\}, \quad (2)$$

где $\varphi_0(r)$ — волновая функция связанного состояния потенциала $V_0(r)$, изображенного на рис. 1 пунктирной линией [3]. Рассмотрим влияние нестационарного возмущения $\delta V_f(t)$, отличного от нуля только в области $0 \leq r \leq R_2$, на вероятность распада квазистационарного состояния. Дополнительные ограничения на возмущающий потенциал будут уточнены ниже.

Представим потенциал $V(r)$ в виде суммы $V(r) = V_0(r) + V_1(r)$, где потенциал $V_1(r)$ обуславливает распад (при $\delta V = 0$). Тогда решение $\Psi(r, t)$ уравнения Шредингера

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - V(r) - \delta V f(t) \right] \Psi(r, t) = 0 \quad (3)$$

с начальным условием (2) можно переписать в виде интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \Psi(r, t) = & \int_0^\infty dr_1 G(r, t; r_1, t_0) \Phi_0(r_1) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_0 t_0 \right\} - \\ & - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \int_0^\infty dr_1 G(r, t; r_1, t_1) [V_0(r_1) - V_0 + \delta V f(t_1)] \Psi(r_1, t_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь константа V_0 есть значение $V_0(r)$ при $r > R_2$, а $G(r, t; r_1, t_1)$ — временная функция Грина для потенциала $V_1(r) + V_0$, имеющая вид [1]

$$G(r, t; r_1, t_1) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dE G_E^{(+)}(r, r_1) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E(t - t_1) \right\}, \quad (5)$$

$$G_E^{(+)}(r, r_1) = \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} \chi_E^{(+)}(r_{>}) \chi_E(r_{<}),$$

где $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $r_{>}$ и $r_{<}$ — это соответственно большее и меньшее из r и r_1 , $\chi_E^{(+)}$ и χ_E — волновые функции непрерывного спектра потенциала $V_1(r) + V_0$. Они определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \chi_E(r) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2i} (\chi_E^{(+)}(r) - \chi_E^{(-)}(r)), \\ \chi_E^{(\pm)}(r) \sim & \exp \{ \pm i(kr + \delta) \}, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь δ — фаза рассеяния.

Первый член в (4) при $r > R_2$ затухает как $(t - t_0)^{-1/2}$. Второй член при $t - t_0 \gg \hbar/E_0$, но $t - t_0$ много меньше времени жизни частицы в яме, описывает распад квазистационарного состояния. Подставляя (5) в (4), получаем

$$\begin{aligned} \Psi(r, t)|_{r > R_2} = & -\frac{1}{2\pi\hbar} \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{-\infty}^\infty \frac{dE}{k} \chi_E^{(+)}(r) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E(t - t_1) \right\} \times \\ & \times \int_0^{R_2} dr_1 \chi_E(r_1) [V_0(r_1) - V_0 + \delta V f(t_1)] \Psi(r_1, t_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Заменим в правой части в (7) $\Psi(r, t)$ на волновую функцию $\Phi_0(r, t)$, являющуюся решением уравнения Шредингера для потенциала $V_0(r) + \delta V f(t)$ с начальным условием (2). Можно показать, что такая замена накладывает на потенциал определенные ограничения, которые обеспечивают медленность распада (отметим только, что из

исла допустимых нужно исключить δ -образные). Разумеется, при этом не могут рассматриваться нестационарные возмущения, приводящие к прямому выбиванию частицы из ямы.

Учитывая уравнение для $\Phi_0(r, t)$, получаем

$$\Psi(r, t)|_{r>R_2} = -\frac{1}{2\pi\hbar} \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{k} \chi_E^{(+)}(r) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E(t-t_1)\right\} \times \\ \times \int_0^{R_2} dr_1 \chi_E(r_1) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - V_0 \right] \Phi_0(r_1, t_1). \quad (8)$$

Согласно [4] волновую функцию $\Phi_0(r, t)$ запишем в виде

$$\Phi_0(r, t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_0 t - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \Delta E(t_1) dt_1\right\} [\Phi_0(r) + z(r, t)], \quad (9)$$

где

$$\int_0^{\infty} dr \Phi_0^*(r) z(r, t) = 0, \quad \int_0^{\infty} dr |\Phi_0(r)|^2 = 1, \quad (10)$$

$$\Delta E(t) = \int_0^{\infty} dr \Phi_0^*(r) \delta V f(t) [\Phi_0(r) + z(r, t)],$$

и $z(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial z(r, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} z(r, t) - V_0(r) z(r, t) + E_0 z(r, t) = \\ = -[\Delta E(t) - \delta V f(t)] [\Phi_0(r) + z(r, t)], \\ z(r, t_0) = 0. \quad (11)$$

Мнимая часть $\text{Im} \Delta E(t)$ обеспечивает правильную нормировку (9)

$$\exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \int_{t_0}^t \text{Im} \Delta E(t_1) dt_1\right\} = 1 + \int_0^{\infty} dr |z(r, t)|^2. \quad (12)$$

Рассмотрим два типа нестационарных возмущений.

Пусть возмущение $\delta V f(t)$ таково, что время воздействия его на распадающую систему

$$\tau_{\text{вз}} \ll \left| \frac{\hbar}{E_0 - E_n} \right|, \quad (13)$$

где E_n — энергия n дискретного уровня с волновой функцией $\varphi_n(r)$ потенциала $V_0(r)$. Поскольку $\hbar/E_0 - E_n$, $\hbar/E_0$, $\hbar/E_n$ являются величинами одного порядка и время жизни частицы в яме много больше $\hbar/E_0$, то основной вклад в интеграл по времени в (8) дает область при $t_1 > t_0 + \tau_{\text{вз}}$.

Разложим $z(r, t)$ в ряд по собственным функциям потенциала $V_0(r)$

$$z(r, t) = \sum_{n \neq 0} b_n(t) \varphi_n(r) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_n) t\right\}. \quad (14)$$

Поскольку нами исключаются из рассмотрения процессы типа «прямото выбивания» частицы из ямы, то суммирование в разложении (14) ведется лишь по таким дискретным состояниям, туннелирование с которых происходит достаточно медленно.

Из (10), (11) следует, что при $t_1 > t_0 + \tau_{\text{вз}}$ величины $b_n(t)$, $\int_{t_0}^t \Delta E(t_1) dt_1$ от времени не зависят. Подставляя (14) в (8) и рассчитывая с помощью (8) поток на бесконечности, для вероятности туннелирования частицы через барьер получаем следующее выражение:

$$W_{\text{тун}} = \frac{\hbar \Gamma_0 + \sum_{n \neq 0} \hbar \Gamma_n |b_n|^2}{1 + \sum_{n \neq 0} |b_n|^2}, \quad (15)$$

где $|b_n|^2 / 1 + \sum_{n \neq 0} |b_n|^2$ есть вероятность перехода на n уровень, а Γ_n ширина распада n квазистационарного состояния, определяемая по формуле [3]

$$\Gamma_n = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m}{\hbar k_n} \left| \int_0^\infty dr \varphi_n(r) V_1(r) \chi_{E_n}(r) \right|^2. \quad (16)$$

В первом порядке по теории возмущения

$$b_n = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{\text{вз}}} dt_1 \langle \varphi_n | \delta V | \varphi_0 \rangle f(t_1) e^{\frac{i}{\hbar} (E_n - E_0) t_1}. \quad (17)$$

Таким образом, влияние кратковременного воздействия на распад квазистационарного состояния сводится к тому, что туннелирование частицы через барьер происходит не только с первоначального квазистационарного уровня, но и с возбуждаемых в результате воздействия возмущения уровней. Отметим, что формула (15) для вероятности туннелирования и (16) для Γ_n применима при условии

$$I(E_n) \gg 1, \quad (18)$$

при котором распад с каждого квазистационарного уровня осуществляется медленно.

Рассмотрим периодическое возмущение $f(t) = \cos \omega t$ в случае, когда $\hbar \omega \ll E_0$, $\hbar \omega \ll V_0 - E_0$. Интегрирование по времени в (8) при $t - t_0 \gg \hbar / E_0$ выбирает из $\Phi_0(r_1, t_1)$ лишь ту часть, которая соответствует установившемуся решению уравнения Шредингера с потенциалом $V_0(r) + \delta V f(t)$.

Выпишем установившееся решение $Z(r, t)$ и $\Delta E(t)$ вплоть до членов второго порядка малости по внешнему возмущению

$$z(r, t) = z_1^{(1)}(r) e^{-i\omega t} + z_{-1}^{(1)}(r) e^{i\omega t} + z_2^{(2)}(r) e^{-2i\omega t} + z_0^{(2)}(r) + z_{-2}^{(2)}(r) e^{2i\omega t},$$

$$\Delta E(t) = \Delta E_1^{(1)} e^{-i\omega t} + \Delta E_{-1}^{(1)} e^{i\omega t} + \Delta E_2^{(2)} e^{-2i\omega t} + \Delta E_0^{(2)} + \Delta E_{-2}^{(2)} e^{2i\omega t}. \quad (19)$$

Пользуясь методикой (близкой к [5]), представим $z_n^{(i)}(r)$ в виде

$$z_n^{(i)}(r) = \alpha_n^{(i)}(r) \varphi_{E_0 + n\omega \hbar}(r) + \beta_n^{(i)}(r) \psi_{E_0 + n\omega \hbar}(r), \quad (20)$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2$; $i=1, 2$. Здесь $\varphi_{E_0+n\omega\hbar}(r)$, $\psi_{E_0+n\omega\hbar}(r)$ — это соответственно регулярное и нерегулярное на бесконечности решения уравнения

$$L\psi = 0, \quad (21)$$

где

$$L = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + E_0 + n\omega\hbar - V_0(r). \quad (22)$$

Коэффициенты $\alpha_n^{(i)}(r)$ и $\beta_n^{(i)}(r)$ в (20) удовлетворяют условию Лагранжа

$$\frac{d\alpha_n^{(i)}(r)}{dr} \varphi_{E_0+n\omega\hbar}(r) + \frac{d\beta_n^{(i)}(r)}{dr} \psi_{E_0+n\omega\hbar}(r) = 0, \quad (23)$$

требованию ограниченности $z_n^{(i)}(r)$ в нуле и на бесконечности и определяются из уравнения для $z_n^{(i)}(r)$.

В дальнейшем будем рассматривать наиболее интересный случай, когда выполнены условия применимости квазиклассического приближения и δV отлично от нуля только внутри барьера. При этом в приближение квазиклассики $\Delta E(t)=0$. Подставляя (20) в (19) и (19) в (8), получаем

$$\begin{aligned} \Psi(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = & -\frac{1}{2\pi\hbar} \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{k} \chi_E^{(+)}(r) \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E(t-t_1)\right\} \times \int_0^{R_2} dr_1 \chi_E(r_1) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - V_0 \right] \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_0 t_1\right\} \left[\varphi_0(r_1) + \sum_n \{ \alpha_n^{(i)}(r_1) \varphi_{E_0+n\omega\hbar}(r_1) + \beta_n^{(i)}(r_1) \psi_{E_0+n\omega\hbar}(r_1) \} \times \right. \\ & \left. \times \exp\{-in\omega t_1\} \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где $\varphi_{E_0} = \varphi_0$, $n=0, \pm 1, \pm 2$. Производя в (24) интегрирование по dt (при $t-t_0 \gg \frac{\hbar}{E_0}$) и dE , имеем

$$\begin{aligned} \Psi(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = & -\frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k(E_0)} \chi_{E_0}^{(+)}(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \times \\ & \times \int_0^{R_2} dr_1 \chi_{E_0}(r_1) \left[E_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - V_0 \right] \varphi_0(r_1) - \\ & - \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n \frac{1}{k(E_0+n\omega\hbar)} \chi_{E_0+n\omega\hbar}^{(+)}(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t - in\omega t} \int_0^{R_2} dr_1 \chi_{E_0+n\omega\hbar}(r_1) \times \\ & \times \left[E_0 + n\omega\hbar + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - V_0 \right] z_n^{(i)}(r_1). \quad (25) \end{aligned}$$

Входящие в (25) интегралы равны

$$\begin{aligned} & \int_0^{R_2} dr_1 \chi_{E_0}(r_1) \left[E_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - V_0 \right] \varphi_0(r_1) = \\ & = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\chi_{E_0}(R_2) \frac{\partial \varphi_0(R_2)}{\partial r} - \varphi_0(R_2) \frac{\partial \chi_{E_0}(R_2)}{\partial r} \right], \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{R_2} dr_1 \chi_{E_0+n\omega\hbar}(r_1) \left[E_0 + n\omega\hbar + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - V_0 \right] z_n^{(i)}(r_1) = \\ & = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\chi_{E_0+n\omega\hbar}(R_2) \frac{\partial z_n^{(i)}(R_2)}{\partial r} - z_n^{(i)}(R_2) \frac{\partial \chi_{E_0+n\omega\hbar}(R_2)}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (26b)$$

Из условия Лагранжа следует, что производные $\frac{d\alpha_n^{(i)}}{dr}$, $\frac{d\beta_n^{(i)}}{dr}$ вклад в (26b) не дают. Кроме того, поскольку $\delta V=0$ при $r > R_2$, то $\beta_n^{(i)}(R_2)=0$.

Ниже при определении $\alpha_n^{(i)}(R_2)$, $\Psi(r, t)|_{r \rightarrow \infty}$ и вероятности туннелирования частицы через барьер будем учитывать лишь главные члены в разложении по малым параметрам $\hbar\omega/E_0$, $\hbar\omega/V_0-E_0$.

Коэффициенты $\alpha_n^{(i)}(R_2)$ в случае, когда применимо квазиклассическое приближение, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm 1}^{(1)}(R_2) &= -\frac{m}{2\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\delta V}{\kappa(r)} \exp \left\{ \mp \omega \int_{R_1}^r \frac{m dr}{\kappa(r)} \right\} dr, \\ \alpha_{\pm 2}^{(2)}(R_2) &= \frac{m^2}{8\hbar^2} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{\delta V}{\kappa(r)} \exp \left\{ \mp \omega \int_{R_1}^r \frac{m dr}{\kappa(r)} \right\} dr \right]^2 + \\ &+ \frac{m^2}{8\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \frac{(\delta V)^2}{\kappa^3(r)} \exp \left\{ \mp 2\omega \int_{R_1}^r \frac{m dr}{\kappa(r)} \right\} dr, \\ \alpha_0^{(2)}(R_2) &= \frac{m^2}{4\hbar^2} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{\delta V}{\kappa(r)} \exp \left\{ \omega \int_{R_1}^r \frac{m dr}{\kappa(r)} \right\} dr \right] \times \\ &\times \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{\delta V}{\kappa(r)} \exp \left\{ -\omega \int_{R_1}^r \frac{m dr}{\kappa(r)} \right\} dr \right] + \frac{m^2}{4\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \frac{(\delta V)^2}{\kappa^3(r)} dr. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $\kappa(r) = \sqrt{2m(V_0(r) - E_0)}$. Учитывая (26), (27) и определяя с помощью (25) поток на бесконечности с точностью до членов второго порядка по возмущению, получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{тун}} &\sim \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \kappa(r) dr - \frac{1}{\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \frac{m \delta V}{\kappa(r)} dr \times \right. \\ &\times (\exp \{\gamma(r)\} + \exp \{-\gamma(r)\}) + \frac{1}{2\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \frac{m^2 (\delta V)^2}{\kappa^3(r)} dr + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \frac{m^2 (\delta V)^2}{\kappa^3(r)} dr \left(\exp \{2\gamma(r)\} + \exp \{-2\gamma(r)\} \right) \Big\}, \quad (28)$$

$$\text{где } \gamma(r) = \omega \int_r^{R_2} \frac{m dr}{\kappa(r)}.$$

При $\omega=0$ формула переходит в разложение (с точностью до членов второго порядка по возмущению) известного квазиклассического выражения для проницаемости барьера

$$W_{\text{стат}} \sim \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{R_1}^{R_2} V \sqrt{2m(V(r) + \delta V - E_0)} dr \right\}. \quad (29)$$

Сравнивая (29) с (28), можно сделать вывод, что при $\omega \neq 0$ роль эффективного потенциала в подбарьерной области играет следующая величина

$$\widetilde{\delta V} = \frac{\delta V}{2} [\exp \{\gamma(r)\} + \exp \{-\gamma(r)\}] = \delta V \operatorname{ch} \gamma(r). \quad (30)$$

Параметр $\gamma(r)$ при $r=R_1$ характеризует степень адиабатичности возмущения и равен отношению частоты периодического возмущения к частоте туннелирования частицы через барьер. При $\gamma(R_1) \ll 1$ возмущение является адиабатическим и вероятность туннелирования имеет следующий вид:

$$W_{\text{тун}} \sim \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \kappa(r) dr - \frac{2}{\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \frac{m \delta V}{\kappa(r)} \left(1 + \frac{\gamma^2(r)}{2} \right) dr + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \frac{m^2 (\delta V)^2}{\kappa^3(r)} (1 + 2\gamma^2(r)) dr + \frac{1}{2\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \frac{m^2 (\delta V)^2}{\kappa^3(r)} dr \right\}. \quad (31)$$

Полученные выше формулы применимы при

$$\delta V \exp \{\gamma(r)\} \ll V_0 - E_0. \quad (32)$$

Выше была указана физическая причина, вызывающая изменение вероятности туннелирования при наличии кратковременного возмущения. Когда возмущение является периодическим, то механизм его действия оказывается иным. Как видно из полученных выражений (28), (31), для вероятности туннелирования основную роль играет при этом эффективное изменение формы потенциального барьера, выражаемое формулой (30).

ЛИТЕРАТУРА

1. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, гл. 5 и 7, 2-е изд. М., 1971.
2. Арсеньев А. А. Сингулярные потенциалы. Изд-во МГУ, 1974.
3. Лубенец Е. Р. «Теоретическая и математическая физика», 1977, 32, № 2.
4. Langhoff P. W., Epstein S. T., Carplus M. «Rev. Mod. Phys.», 1972, 44, 602.
5. Зельдович Я. Б. ЖЭТФ, 1956, 31, 1101.

Поступила в редакцию
15.7 1977 г.
Кафедра
квантовой теории