УДК 535.417

А. В. Козарь
В. С. Колесников
Ю. А. Пирогов

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ СИСТЕМАХ РЕЗОНАНСНОГО ТИПА

Методом импедансных характеристик рассмотрено распределение электрического поля в многослойных системах резонансного типа, обладающих свойством усиления амплитуды падающего поля внутри системы за счет интерференционных эффектов. С учетом реальных параметров диэлектриков получены аналитические соотношения для напряженности электрического поля в слоях различных структур.

При использовании тонкопленочных многослойных систем часто возникает необходимость определения значения напряженности электрического поля в отдельных слоях структуры. Такая проблема появляется, например: 1) при создании высокоэффективных приемных и преобразующих устройств, основанных на объемном взаимодействии излучения с чувствительным образцом [1], для расчета связанных с нелинейностью проводимости образца динамических характеристик системы; 2) при проведении диагностики вещества, когда обеспечивается резонансное включение образца исследуемого материала, слабо взаимодействующего с излучением в обычных условиях; 3) для предсказания возможности возникновения оптических неоднородностей в слоях многослойной структуры под воздействием лазерного излучения; 4) при анализе резонансных эффектов в слоистых средах со слабой нелинейностью и т. д.

В общем случае возможно лишь численное решение обсуждаемой задачи. Для этого может служить метод, основанный на рекуррентных соотношениях между напряженностями электрического поля в соседних сечениях структуры [2]. Анализ распределения поля может быть также проведен по матричной методике [3]. Представляется не менее удобным применение метода импедансных характеристик, изложенного в [4] и положенного в основу предлагаемой статьи.

В настоящей работе с учетом реальных параметров диэлектриков получено распределение электрического поля в многослойных структурах резонансного типа, обладающих свойством усиления амплитуды падающего поля внутри системы за счет интерференционных эффектов. Рассматриваются системы, наиболее часто употребляемые с этой целью и представляющие собой совокупность четверть- и полуволновых слоев. Для простоты изложения предполагается нормальное падение плоской электромагнитной волны с длиной волны λ_0 из вакуума на многослойную структуру, расположенную в плоскости YZ. Направление оси OX совпадает с направлением падения волны.

Пусть система образована из N слоев линейных изотропных немагнитных диэлектриков с потерями. Пронумеруем ее сечения так, как показано на рис. 1. Вещество, составляющее слой справа от сечения j,

будем характеризовать комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_j = \varepsilon_j' + i\varepsilon_j''$. Обозначим через $z_{\varepsilon_j} = 1/\sqrt{\varepsilon_j}$ волновое сопротивление слоя с ε_j, а через z_j входной импеданс в j-м сечении, нормировав их на волновое сопротивление свободного пространства. Задавая входной импеданс на правой границе структуры z_0 по рекуррентной формуле

$$z_j = z_{\varepsilon_j} \frac{z_{j-1} + z_{\varepsilon j}\, th\, \gamma_j x_j}{z_{\varepsilon j} + z_{j-1}\, th\, \gamma_j x_j}, \qquad (1)$$

где

$$\gamma_j = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_j} = \alpha_j + i\beta_j,$$

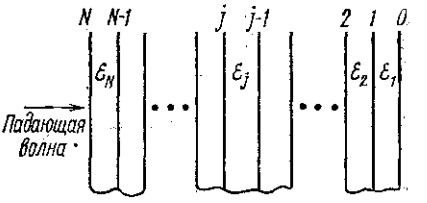


Рис. 1

можно определить входной импеданс в любом сечении структуры. Здесь γ — постоянная распространения волны в среде с ε_j, x_j — толщина j-го слоя. Приняв амплитуду падающей на систему волны за 1 и поместив начало координат на левую границу слоя с ε_j, для напряженности электрического поля в нем, используя результаты, полученные в [4], будем иметь

$$E_j(x) = \prod_{k=j}^{N} \frac{z_k + z_{\varepsilon k}}{z_k + z_{\varepsilon k+1}} e^{-\gamma_{k+1} x_{k+1}} \left\{ e^{-\gamma_j x} + \frac{z_j - z_{\varepsilon j}}{z_j + z_{\varepsilon j}} e^{\gamma_j x} \right\}, \qquad (2)$$

где x — текущая координата в слое.

Далее, положим, что рабочий слой (в котором требуется сконцентрировать максимальную часть энергии) оптической толщины $\lambda_0/2$, характеризуемый $\varepsilon_p = \varepsilon_p' + i\varepsilon_p''$, помещен между двумя четверть — волновыми зеркалами с четным числом слоев $2r1$ и $2r2$. Слои с ε_1 и ε_2 в зеркалах попарно чередуются, и к рабочему слою примыкают слои с меньшей ε' (пусть $\varepsilon_1' > \varepsilon_2'$), а справа от системы находится непоглощающая среда с показателем преломления $n_п$ (рис. 2, *а*). Предположим также, что потери во всех слоях малы и введем малые величины:

$$\chi = |\varepsilon_p''|/2\varepsilon_p'; \quad \chi_1 = |\varepsilon_1''|/2\varepsilon_1'; \quad \chi_2 = |\varepsilon_2''|/2\varepsilon_2',$$

после чего разложим выражения для $Z_{\varepsilon j}$, γ_i в ряд с точностью до членов второго порядка малости по χ. Обозначив входные импедансы в j-м и 0-м сечениях:

$$z_j = g_j/n_n h_j; \quad z_0 = g_0/n_n h_0,$$

после несложных преобразований по формуле (1) для четных $j \leqslant 2r1$ получаем

$$\begin{pmatrix} g_j \\ h_j \end{pmatrix} = \widehat{M}_j \begin{pmatrix} g_0 \\ h_0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } g_0 = h_0 = 1, \qquad (3)$$

а квадратная матрица $\widehat{M}_j$ равна

$$\widehat{M}_j = \frac{(-1)^{j/2}}{\sqrt{1-|a|^2}} \begin{pmatrix} kU_{j/2} - U_{j/2-1} + \Phi' & lU_{j/2} \\ mU_{j/2} & pU_{j/2} - U_{j/2-1} + \Phi'' \end{pmatrix}.$$

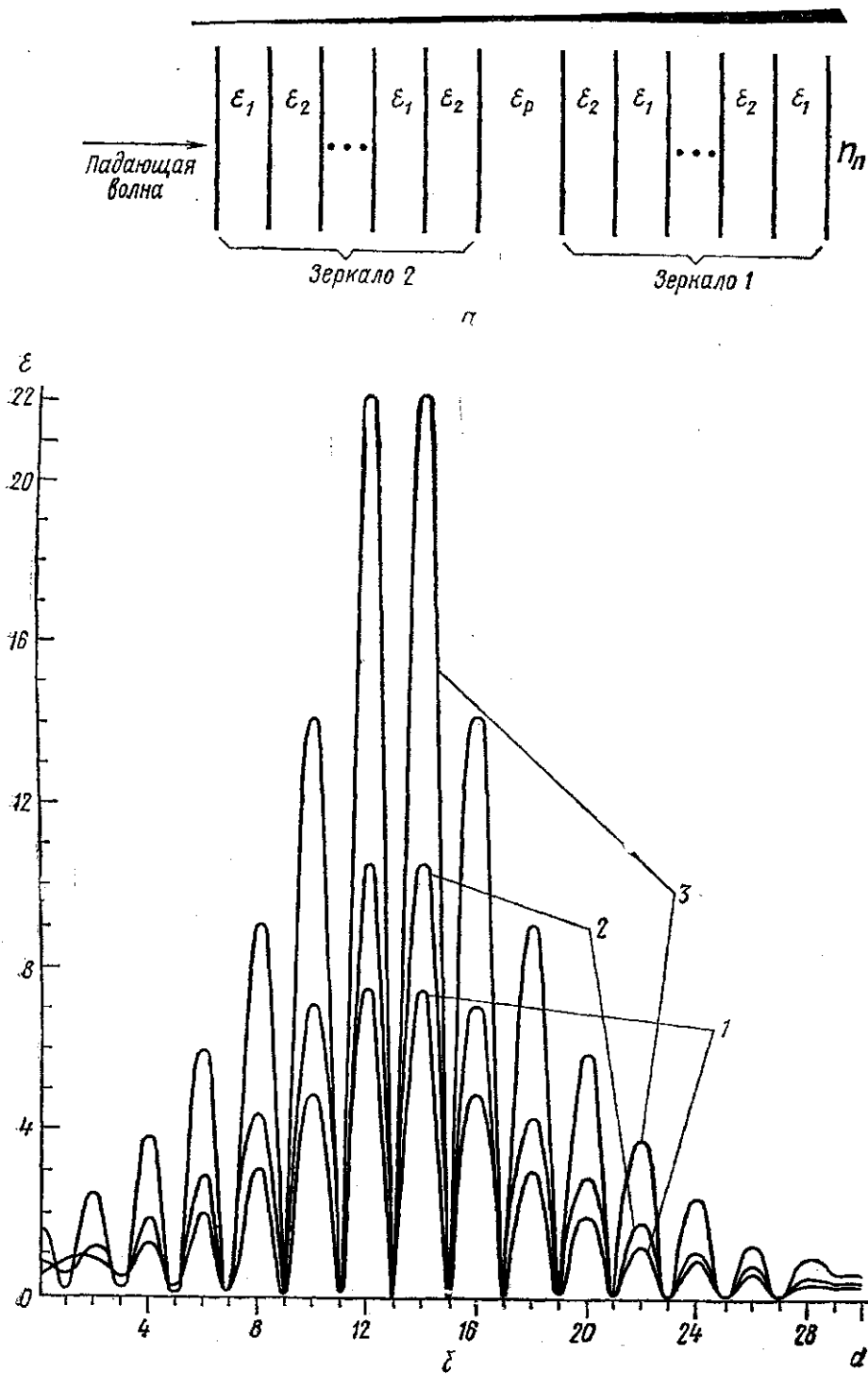

ε_1
ε_2
ε_1
ε_2
ε_p
ε_2
ε_1
ε_2
ε_1
n_n
Падающая волна
Зеркало 2
Зеркало 1
n
ε
22
20
16
12
8
4
0
4
8
12
16
20
24
28
γ
d
1
2
3

Рис. 2

Здесь: U_s — полиномы Чебышева второго рода порядка s от аргумента $a = \frac{1}{2}(k+p)$;

$$k = n[1 + i(\chi_2 - \chi_1)] + K_2; \quad n = (\varepsilon_1'/\varepsilon_2')^{1/2};$$

$$l = \frac{\pi}{2}(\chi_2 n_1 + \chi_1 n_2) + L_2; \quad m = \frac{\pi}{2}(\chi_2/n_1 + \chi_1/n_2) + M_2;$$

$$p = \frac{1}{n}[1 - i(\chi_2 - \chi_1)] + P_2; \quad n_1 = n_n/\sqrt{\varepsilon_1'}; \quad n_2 = n_n/\sqrt{\varepsilon_2'};$$

K_2, L_2, M_2, P_2 — величины $O(\chi^2)$, а Φ' и Φ'' — есть $U_{j/2}O(\chi^2)$.

Если слои с ε_1 в зеркале 1 заменить слоями с ε_2, и наоборот, то (3) переходит в соотношение

$$\begin{pmatrix} g_j \\ h_j \end{pmatrix} = \widetilde{M}_j \begin{pmatrix} g_0 \\ h_0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\widetilde{M}_j$ получается из $\widehat{M}_j$ перестановкой ее диагональных элементов m_{11} и m_{22}. Таким образом, по формулам (3) и (4) можно с достаточной степенью точности вычислить входные импедансы в четных сечениях зеркал. По формуле (1) вычисляются входные импедансы в остальных сечениях системы. После этого нетрудно преобразовать выражение (2).

Представим напряженность электрического поля в j-м слое в виде $E_j(x) = \mathscr{E}_j(x)\, e^{-i\varphi_j(x)}$. В результате проведения вышеперечисленных преобразований, удерживая наибольшие по порядку χ члены, для $\mathscr{E}_j(x)$ имеем:

для четных $0 \leqslant j \leqslant 2r1$ и нечетных $j+1 < 2r1$

$$\mathscr{E}_{j,j+1}(x) = n^{r2-r1+j/2}\, \Phi_0 (1 + n_{2,1}\Phi_{2j})\, \Phi(k_{j,j+1}, x), \tag{5а}$$

где

$$\Phi_0 = [1 + n_n n^{2(r2-r1)} + \xi_0(1 + \Phi_1)]^{-1}; \quad \xi_0 = n^{2r2}\frac{\pi\chi}{n_p} n_n;$$

$$\Phi_1 = (\chi_1/n_2 + \chi_2/n_1)\frac{n_p}{2B\chi}; \quad B = \frac{n^2-1}{2n}; \quad n_p = n_n/\sqrt{\varepsilon_p'};$$

здесь и далее через $\Phi(k_{j,j+1}, x)$ обозначена зависимость

$$\Phi(k_{j,j+1}, x) = [(e^{-\alpha_{j,j+1}x} - k_{j,j+1}e^{\alpha_{j,j+1}x})^2 + 4k_{j,j+1}\cos^2\beta_{j,j+1}x]^{1/2};$$

$$\Phi_{2j} = n^{-j} + \frac{\pi\chi}{2n_p}\Phi_1(1 - n^{-j});$$

$$k_j = \frac{1 - n_2\Phi_{2j}}{1 + n_2\Phi_{2j}}; \quad k_{j+1} = -\frac{1 - n_1\Phi_{2j} - \pi\chi_1/2}{1 + n_1\Phi_{2j} + \pi\chi_1/2};$$

для $j = 2r1 + 1$

$$\mathscr{E}_j(x) = n^{r2}\Phi_0(1 + n_p\Phi_2^{2r1} + \pi\chi)\,\Phi(k_j, x), \tag{5б}$$

где

$$k_j = \frac{1 - n_p\Phi_2^{2r1} - \pi\chi}{1 + n_p\Phi_2^{2r1} + \pi\chi}; \quad \Phi_2^{2r1} = \Phi_{2j} \text{ при } j = 2r1$$

для $j = 2r1 + 1 + s$ и четных $0 \leqslant s \leqslant 2r2$ и нечетных $s + 1 < 2r2$

$$\mathscr{E}_{j,j+1}(x) = n^{r2-s/2}\,\Phi_0\,(1 + n_{1,2}\,\Phi_{3s})\,\Phi(k_{j,j+1},\, x), \tag{5в}$$

где

$$\Phi_{3s} = \left[1 + \frac{1}{2}\,\Phi_1\,(2 - n^{-s} - n^{-2r1}) + n^{-2r1}\,\frac{n_p}{\pi\chi}\right] n^s\,\frac{\pi\chi}{n_p};$$

$$k_j = \frac{1 - n_1\,\Phi_{3s}}{1 + n_1\,\Phi_{3s}};\quad k_{j+1} = -\frac{1 - n_2\,\Phi_{3s} - \pi\chi_2/2}{1 + n_2\,\Phi_{3s} + \pi\chi_2/2}.$$

На рис. 2, *б* представлено распределение $\mathscr{E}(d)$ в зависимости от оптической толщины d, выраженной в длинах волн $\frac{\lambda_0}{4}$, в многослойной системе, рассчитанное по формулам (5) при $r1 = 8$; $r2 = 6$. Кривой *1* соответствуют следующие параметры слоев: $\varepsilon_p = 5{,}06 + i10^{-2}$; $\varepsilon_1 = 5{,}06 + i4 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_2 = 2{,}1 + i2 \cdot 10^{-3}$; $n_п = 1{,}52$; кривая *2* рассчитана для $\varepsilon_1'' = \varepsilon_2'' = 0$; $\varepsilon_p'' \neq 0$, а кривая *3* — для $\varepsilon_1'' = \varepsilon_2'' = \varepsilon_p'' = 0$ при тех же значениях остальных параметров. Следует отметить следующие свойства рассмотренной системы.

1. Максимально возможная напряженность электрического поля достигается в рабочем слое при выполнении условий

$$r1 \gg r2;\quad \xi_0\,(1 + \Phi_1) = 1 \tag{6}$$

и определяется потерями в слоях многослойной системы.

2. При $\chi_1 = \chi_2 = 0$ и выполнении (6) $\mathscr{E}_{max} \sim \frac{1}{\sqrt{\chi}}$, как нетрудно заметить, в этом случае отраженной и прошедшей волны нет, т. е. вся падающая энергия поглощается (преобразуется) в рабочем слое. Такой эффект уже обсуждался в работах [1, 5].

Определенный интерес представляет собой многослойная структура, в которой справа от зеркала 1 на расстоянии $\lambda_0/4n_п$ расположен идеальный отражатель с коэффициентом отражения $e^{i\pi}$ (рис. 3, *а*). Проведя выкладки, аналогичные проведенным при выводе (5), для $\mathscr{E}_j\,(x)$ можно получить:

для четных $0 \leqslant j \leqslant 2r1$ и нечетных $j + 1 < 2r1$

$$\mathscr{E}_{j,j+1}(x) = n^{r2-r1+j/2}\,\Phi_0\,(1 + n_{2,1}\,\Phi_{4j})\,\Phi(k_{j,j+1},\, x), \tag{7а}$$

где

$$\Phi_0 = \left\{1 + \xi_0\left[1 + \Phi_1\left(1 - \frac{1}{2}\,n^{-2r1}\right)\right]\right\}^{-1};\quad \Phi_{4j} = \frac{\pi\chi}{2\pi_p}\,\Phi_1\,(1 - n^{-j});$$

$$k_j = \frac{1 - n_2\,\Phi_{4j}}{1 + n_2\,\Phi_{4j}};\qquad k_{j+1} = \frac{1 - n_1\Phi_{4j} - \pi\chi_1/2}{1 + n_1\,\Phi_{4j} + \pi\chi_1/2};$$

для $j = 2r1 + 1$

$$\mathscr{E}_j\,(x) = n^{r2}\,\Phi_0\,(1 + n_p\,\Phi_4^{2r1})\,\Phi\,(k_j,\, x), \tag{7б}$$

где

$$\Phi_4^{2r1} = \Phi_{4j} \text{ при } j = 2r1;\quad k_j = \frac{1 - n_p\,\Phi_4^{2r1} - \pi\chi}{1 + n_p\,\Phi_4^{2r1} + \pi\chi};$$

для $j = 2r1 + 1 + s$ и четных $0 \leqslant s \leqslant 2r2$ и нечетных $s + 1 < 2r2$

$$\mathscr{E}_{j,j+1}(x) = n^{r2-s/2}\,\Phi_0\,(1 + n_{1,2}\,\Phi_{5s})\,\Phi(k_{j,j+1},\, x), \tag{7в}$$

где

$$k_j = \frac{1 - n_1\,\Phi_{5s}}{1 + n_1\,\Phi_{5s}};\quad k_{j+1} = -\frac{1 - n_2\,\Phi_{5s} - \pi\chi_2/2}{1 + n_2\,\Phi_{5s} + \pi\chi_2/2};\quad \Phi_{5s} = \Phi_{3s} - n^{s-2r1}.$$

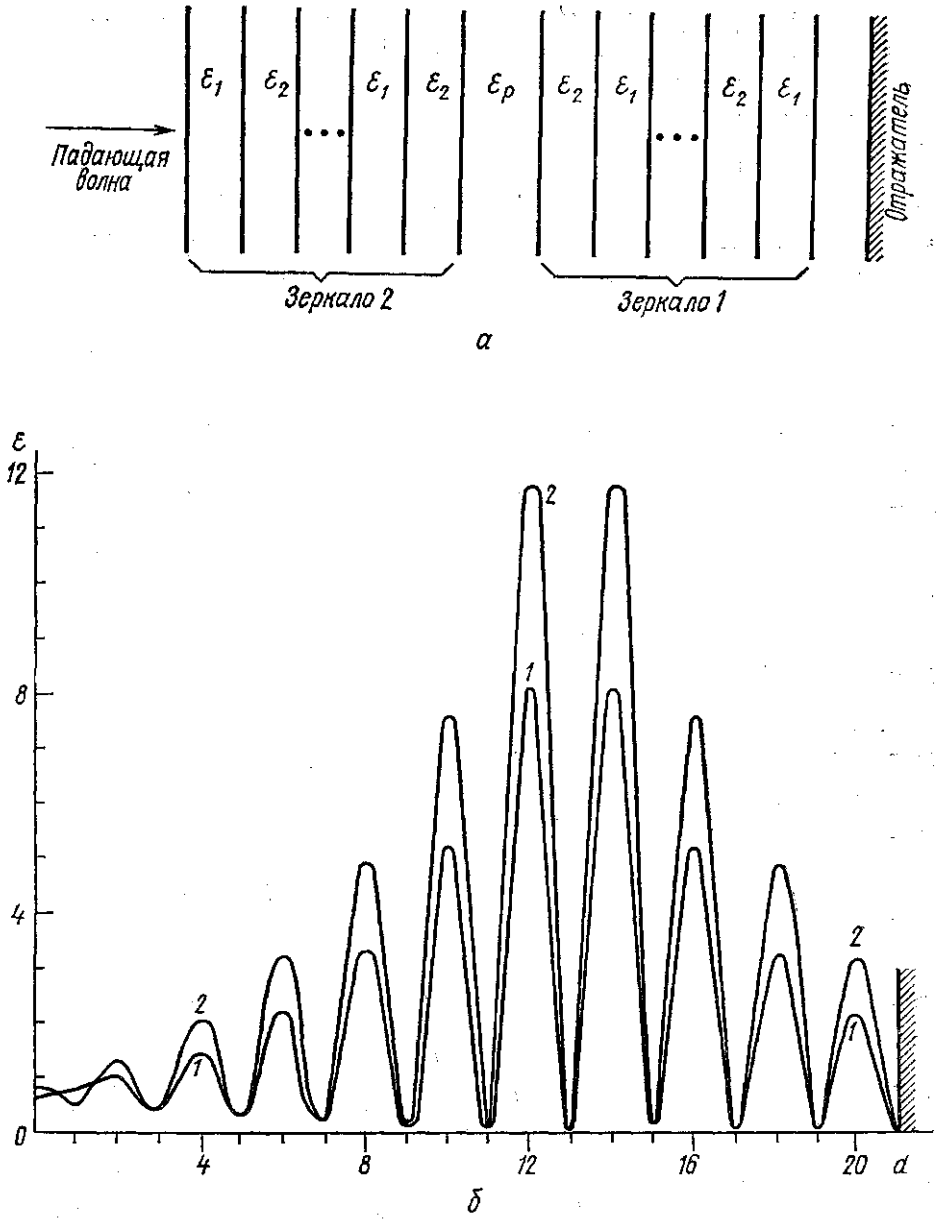
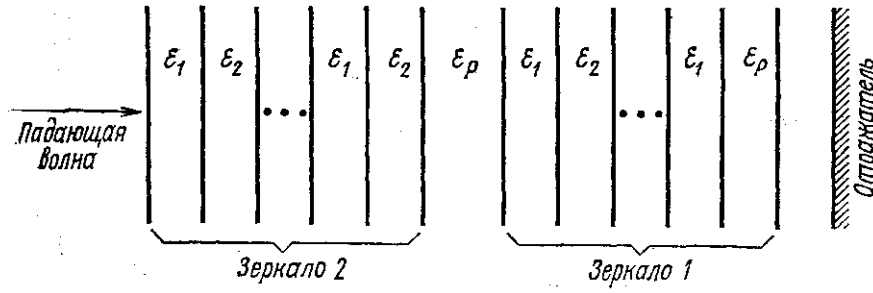


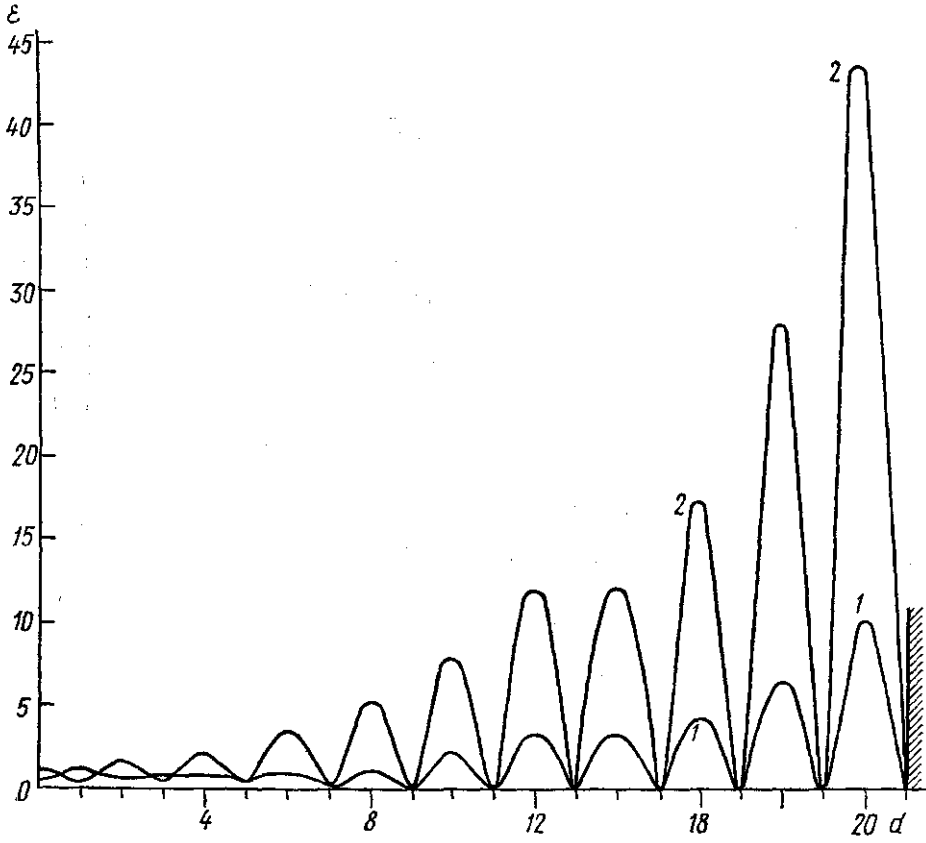
Рис. 3

По формулам (7) для $r1=3$; $r2=6$ проведен расчет, результаты которого представлены на рис. 3, *б*. Как и прежде, по оси абсцисс отложена оптическая толщина d, а по оси ординат $\mathcal{E}(d)$. Параметры слоев для кривых *1*, *2* рис. 3, *б* соответствуют параметрам слоев для кривых 1, 2 рис. 2, *б*. Система такого типа обладает следующими свойствами.

1. Максимальное значение электрического поля достигается в рабочем слое при выполнении условия



а



б

Рис. 4

$$\xi_0\left[1+\Phi_1\left(1-\frac{1}{2}n^{-2r_1}\right)\right]=1,$$

из которого определяется необходимое число слоев в зеркале *2*. При этом $\mathscr{E}_{\max}$ определяется потерями в слоях структуры.

2. При $\chi_1=\chi_2=0$ и $\xi_0=1$ $\mathscr{E}_{\text{макс}}\sim\frac{1}{\sqrt{\chi}}$ и отраженной волны нет.

Иная картина распределения поля по слоям структуры имеет место, когда в зеркале I слои с ε_1 заменены слоями с ε_2 и наоборот. Такая система при наличии отражателя справа от зеркала 1 изображена на рис. 4, *а*. В этом случае $\mathscr{E}_j(x)$ имеет вид:

для четных $0 \leqslant j \leqslant 2r1$ и нечетных $j+1<2r1$

$$\mathscr{E}_{j,j+1}(x) = n^{r1+r2-j/2}\,\Phi_0\,(1 + n_{1,2}\,n^j\,\Phi_{4j})\,\Phi\,(k_{j,j+1},\,x), \tag{8а}$$

где $\Phi_0 = 1 + \xi_0\left(1 + \frac{1}{2}\Phi_1 n^{2r1}\right)$; Φ_{4j} определено в (7);

$$k_j = \frac{1 - n_1 n^j\,\Phi_{4j}}{1 + n_1 n^j\,\Phi_{4j}};\quad k_{j+1} = \frac{1 - n_2 n^j\,\Phi_{4j} - \pi\chi_2/2}{1 + n_2 n^j\,\Phi_{4j} + \pi\chi_2/2};$$

для $j = 2r1 + 1$

$$\mathscr{E}_j\,(x) = n^{r2}\,\Phi_0\,(1 + n_p n^{2r1}\,\Phi_4^{2r1})\,\Phi\,(k_j,\,x), \tag{8б}$$

где

$$k_j = \frac{1 - n_p n^{2r1}\,\Phi_4^{2r1} - \pi\chi}{1 + n_p n^{2r1}\,\Phi_4^{2r1} + \pi\chi};$$

для $j = 2r1 + 1 + s$ и четных $0 \leqslant s \leqslant 2r2$ и нечетных $s + 1 < 2r2$

$$\mathscr{E}_{j,j+1}(x) = n^{r2-s/2}\,\Phi_0\,(1 + n_{1,2}\,\Phi_{6s})\,\Phi\,(k_{j,j+1},\,x), \tag{8в}$$

где

$$\Phi_{6s} = n^s\,\frac{\pi\chi}{n_p}\left[1 + \frac{1}{2}\Phi_1 n^{2r1}\,(1 - n^{-2r1-s})\right];$$

$$k_j = \frac{1 - n_1\,\Phi_{6s}}{1 + n_1\,\Phi_{6s}};\quad k_{j+1} = -\frac{1 - n_2\,\Phi_{6s} - \pi\chi_2/2}{1 + n_2\,\Phi_{6s} + \pi\chi_2/2}.$$

На рис. 4, *б* изображено распределение электрического поля $\mathscr{E}$ (*d*) в системе такого типа. Кривым *1*, *2* соответствуют параметры слоев для кривых *1*, *2* рис. 2, *б*, а $r1=3$; $r2=6$. Нетрудно видеть, что бо́льшая часть энергии, запасенной системой, концентрируется в зеркале 1. Основные свойства системы следующие.

1. $\mathscr{E}_{\max}$ в рабочем слое достигается при выполнении условия

$$\xi_0\left(1 + \frac{1}{2}\Phi_1 n^{2r1}\right) = 1$$

и определяется опять-таки потерями в слоях структуры.

2. При $\chi_j = \chi_2 = 0$ и $\xi_0 = 1$ в принципе возможно неограниченное возрастание поля в зеркале 1 по мере роста числа слоев в нем и одновременно полном поглощении падающей на систему энергии. Спектральные характеристики такой структуры при этом существенно меняются [5].

Фаза $\varphi_i\,(x)$ поля, определенная ранее, независимо от вида системы определяется соотношениями:

для четных $0 \leqslant j \leqslant 2r1$ и нечетных $j+1<2r1$

$$\varphi_{j,j+1}(x) = \pi\left(r2 + r1 + 1 - \frac{j}{2}\right) + F\,(k_{j,j+1},\,x) + \varphi_0,$$

где

$$F\,(k_{j,j+1},\,x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - k_{j,j+1}\exp\{2\alpha_{j,j+1}\,x\}}{1 + k_{j,j+1}\exp\{2\alpha_{j,j+1}\,x\}}\operatorname{tg}\beta_{j,j+1}\,x\right);$$

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0 & \text{для } j \\ -\frac{\pi}{2} & \text{для } j+1 \end{cases};$$

для $j = 2r1 + 1$ $\varphi_j(x) = \pi r2 + F(k_j, x)$;

для $j = 2r1 + 1 + s$ и четных $0 \leqslant s \leqslant 2r2$ и нечетных $s + 1 < 2r2$

$$\varphi_{j,j+1}(x) = \pi\left(r2 - \frac{s}{2}\right) + F(k_{j,j+1}, x) + \varphi_0.$$

В заключение следует отметить, что результаты вычислений по формулам (5)—(8) совпадают с результатами расчета на ЭВМ по точным формулам (1)—(2) с точностью порядка χ, т. е. для малых χ практически не отличаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков А. Н., Козарь А. В., Колесников В. С., Пирогов Ю. А., Тихонравов А. В. В кн.: «Всесоюзный симпозиум по приборам, технике и распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере (тезисы докладов)». М., 1976, с. 77.
2. Joseph H. «Appl. Opt.», 1976, 15, 2339.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973.
5. Козарь А. В., Колесников В. С., Пирогов Ю. А. В кн.: «Всесоюзный симпозиум по приборам, технике и распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере (тезисы докладов)». М., 1976, с. 131.

Поступила в редакцию
14.9 1977 г.
Кафедра
радиофизики СВЧ